библиотека
по





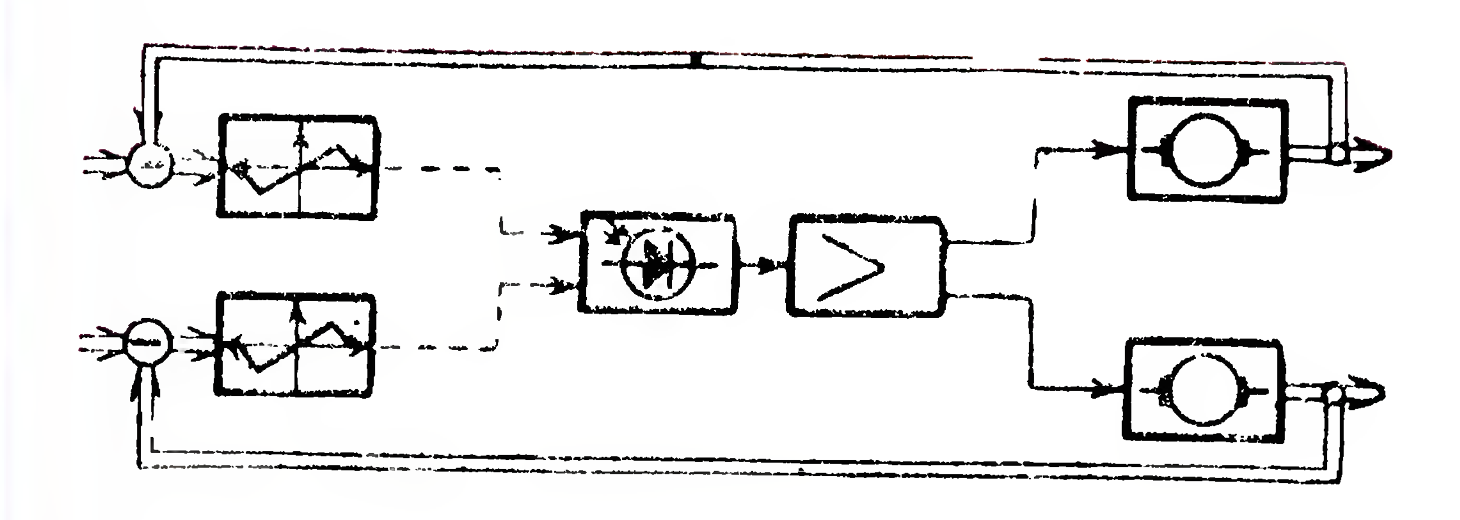






М. В. ЕФИМОВ

СЛЕДЯЩИЕ СИСТЕМЫ С ОПТИЧЕСКИМИ СВЯЗЯМИ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «ЭНЕРГИЯ»

БИБЛИОТЕКА ПО АВТОМАТИКЕ

Выпуск 358

М. В. ЕФИМОВ

СЛЕДЯЩИЕ СИСТЕМЫ С ОПТИЧЕСКИМИ СВЯЗЯМИ



«ЭНЕРГИЯ»

МОСКВА 1969

6Ф6.5
Е 90
УДК 62-52:621.383

Ефимов М. В.

Е 90 Следящие системы с оптическими связями. М., «Энергия», 1969.

184 с. с илл. (Б-ка по автоматике. Вып. 358)

В книге рассматриваются принципы действия следящих систем с оптическими связями, преобразования световых и электрических сигналов, типовые помехи следящих систем и их динамический и статистический анализ. Излагаются некоторые вопросы оптимизации следящих систем с оптическими связями и их элементов.

Для анализа световых сигналов и определения их характеристик после преобразования элементами следящих систем используется метод многомерных преобразований Фурье.

Книга предназначена для инженеров и студентов старших курсов, специализирующихся в области автоматики.

$\frac{3\text{-}3\text{-}13}{242\text{-}69}$ 6Ф6.5

Ефимов Михаил Васильевич

Следящие системы с оптическими связями

Редактор *В. В. Бурляев*
Технический редактор *О. Д. Кузнецова*
Корректор *З. Б. Шлайфер*

Сдано в набор 18/IV 1969 г. Подписано к печати 4/XI 1969 г. Т-11598
Формат 84×108¹/₃₂ Бумага типографская № 3
Усл. печ. л. 9,66 Уч.-изд. л. 10,48
Тираж 10 000 экз. Цена 52 коп. Зак. 2194

Издательство „Энергия". Москва, Ж-114, Шлюзовая наб., 10.

Московская типография № 10 Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР.
Шлюзовая наб., 10.

ВВЕДЕНИЕ

Следящие системы с оптическими связями получают с каждым годом все большее распространение в приборостроении, измерительной технике и машиностроении. Они применяются в системах программного управления станками и механизмами, системах контроля и управления за ходом технологических процессов, а также в различных образцах военной техники.

В процессе работы следящих систем с оптическими связями используются сигналы двух видов: световые и электрические. Как правило, световые сигналы используются при работе чувствительных элементов следящих систем с оптическими связями. Преобразование световых сигналов в электрические осуществляется фотоэлектрическими приемниками излучения.

Фотоэлектрические чувствительные элементы позволяют производить бесконтактный контроль и измерение различных физических параметров: линейных и угловых величин, скоростей и ускорений движения объектов, состава жидких и газообразных сред, температуры различных тел, влажности газов, расхода и уровня жидкости в сосудах. Они отличаются высокой точностью и при работе не нагружают регулируемые объекты дополнительными силами и моментами.

Принципы построения фотоэлектрических измерительных и контрольных устройств и физические основы их работы рассмотрены в ряде книг, изданных в последние годы: С. Ф. Корндорфа, А. М. Дубиновского и др. [Л. 19], В. Г. Вафиади [Л. 7], С. В. Елисеева [Л. 14], Л. П. Лазарева [Л. 23], В. И. Литвака [Л. 24, 25], А. В. Мироненко [Л. 27], Ю. Г. Якушенкова [Л. 50]. Однако в этих книгах рассматриваются в основном системы, не имеющие обратных связей.

При анализе следящих систем с оптическими связями необходимо учитывать, что световые сигналы являются функциями нескольких переменных: угловых координат, времени и длины волны оптического спектра излучений. Для определения характеристик световых сигналов после прохождения через различные элементы фотоэлектрических устройств используется метод многомерных преобразований Фурье. Сущность этого метода и его применение к решению ряда задач инфракрасной техники изложены в книгах: Д. Э. Джемисона и др. [Л. 13], Л. З. Криксунова и И. Ф. Усольцева [Л. 21] и Н. С. Шестова [Л. 48]. В книгах А. Марешаля и М. Франсона [Л. 26], О'Нейла [Л. 30] и Дж. Строука [Л. 42] этот метод применен к решению некоторых задач оптики, а в книге Я. А. Рыфтина [Л. 36] — к анализу телевизионных систем.

Многомерные световые сигналы могут быть детерминированными и случайными. Теория случайных многомерных сигналов подробно изложена в известных монографиях Т. Андерсона [Л. 1] и В. С. Пугачева [Л. 34].

Метод многомерных преобразований Фурье позволяет определять статические характеристики элементов следящих систем с оптическими связями, а также характеристики детерминированных и случайных электрических сигналов на выходе фотоэлектрических устройств при подаче на их вход световых сигналов. После определения этих характеристик и составления структурной схемы дальнейший анализ следящей системы с оптическими связями производится хорошо разработанными в теории автоматического управления методами с применением одномерных преобразований Фурье и Лапласа.

Следящие системы с оптическими связями часто бывают двухмерными (двухкоординатными). Теория двухмерных следящих систем изложена в монографии А. А. Казамарова и др. [Л. 16].

Статические характеристики фотоэлектрических измерительных устройств являются нелинейными, поэтому для анализа устойчивости следящих систем с оптическими связями целесообразно пользоваться методом гармонической линеаризации следящих систем. Наиболее полное изложение этого метода приведено в книге Е. П. Попова и И. П. Пальтова [Л. 33].

В настоящей книге рассмотрены следующие вопросы:

типовые схемы и элементы следящих систем с оптическими связями;

теория преобразования световых сигналов с использованием многомерных преобразований Фурье;

устойчивость следящих систем с оптическими связями;

статистические характеристики случайных сигналов, действующих на следящие системы с оптическими связями;

статистическая динамика следящих систем с оптическими связями.

При написании книги автором использованы некоторые полученные им оригинальные материалы, относящиеся к теории преобразования многомерных сигналов и расчету переходных процессов в многомерных фильтрах.

Автор выражает признательность заслуженному деятелю науки и техники РСФСР, профессору, доктору технических наук А. С. Шаталову за рекомендации, сделанные при просмотре плана книги, а также кандидату технических наук С. А. Черникову за плодотворные дискуссии, способствовавшие улучшению качества книги.

Автор будет благодарен лицам, которые пришлют замечания по данной книге в издательство «Энергия» по адресу: Москва, Шлюзовая набережная, 10.

Глава первая

ТИПОВЫЕ СХЕМЫ СЛЕДЯЩИХ СИСТЕМ С ОПТИЧЕСКИМИ СВЯЗЯМИ

1. Следящие системы программного управления станками

Программу работы станка в ряде случаев удобно задавать в виде чертежа, выполненного в определенном масштабе. Для считывания программы с чертежа и управления приводами продольной и поперечной подач станка используется фотоэлектрическая копировальная головка.

На рис. 1 изображена схема фотоэлектрической копировальной головки фрезерного станка [Л. 25]. В процессе копирования детали ось фотоэлектрической головки непрерывно совмещается с линией чертежа.

Источниками светового сигнала являются две лампы накаливания *3*, световой поток от которых с помощью конденсоров *2* направляется на линию чертежа *1*. Отраженные от чертежа световые лучи фокусируются объективом *4* в плоскости анализатора *5*, представляющего собой вращающийся диск с эксцентрично расположенным отверстием. При каждом обороте анализатора изображение линии чертежа дважды пересекается отверстием, в эти моменты времени на выходе приемника излучения возникают импульсы фототока.

Усиленные импульсы подаются на тиратронный демодулятор. На аноды тиратронов подается переменное напряжение той же частоты, что и на синхронный двигатель *Д1*, поэтому анодные напряжения тиратронов синхронизированы с положением отверстия в диске. Если линия чертежа совпадает с горизонтальным диаметром *AB* окружности, описываемой отверстием, то углы зажигания тиратронов составляют 90°.

Напряжения рассогласования, снимаемые с демодулятора, равны:

$$U_1 = U_m \left(1 - \sin\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \cos\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right);$$

$$U_2 = U_m \cos\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \sin\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2},$$

где φ_1 и φ_2 — отклонения углов зажигания тиратронов от 90°.

Угол наклона касательной к линии чертежа относительно горизонтального диаметра равен:

$$\psi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2},$$

а нормальное отклонение ее от оси головки

$$\Delta = r \sin \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2},$$

поэтому напряжение U_1 связано с углом ψ, а напряжение U_2 — с нормальным отклонением Δ.

Сигнал углового рассогласования U_1 после усиления и преобразования поступает на исполнительный двигатель *Д2*, поворачивающий корпус головки до совмещения диаметра *АВ* окружности

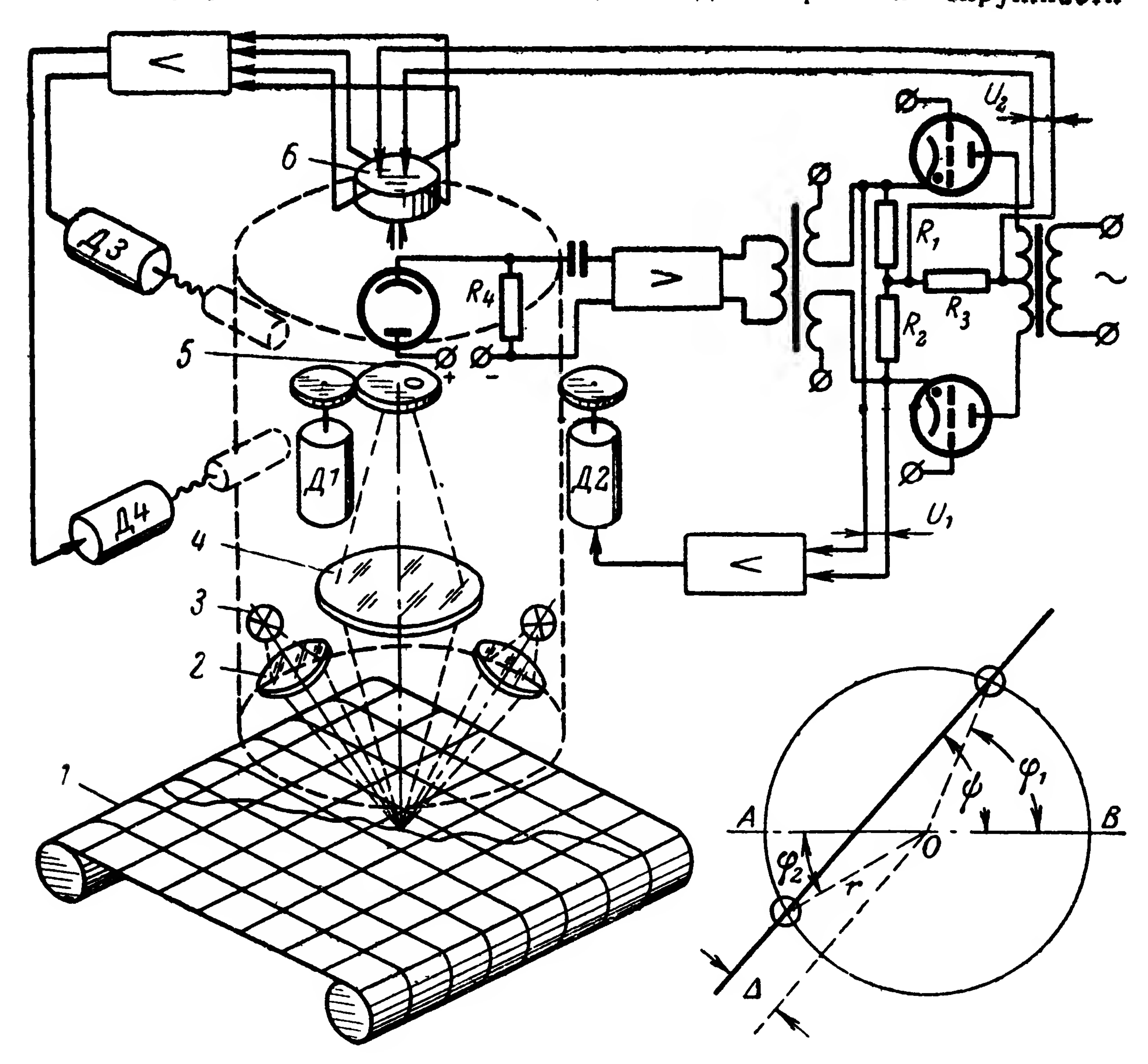


Рис. 1. Схема копировальной головки.

1 — чертеж; *2* — конденсор; *3* — лампа накаливания; *4* — объектив; *5* — анализатор; *6* — потенциометр.

с касательной к линии чертежа или до того момента, когда они будут параллельными. С корпусом головки жестко связан синусно-косинусный потенциометр *6*, на который подается сигнал нормального рассогласования U_2. На выходе потенциометра возникают две составляющие сигнала, пропорциональные синусу и косинусу угла ψ. Эти составляющие сигнала рассогласования после усиления подаются на приводы продольной и поперечной подач головки. Одновременно сигналы рассогласования подаются на приводы подач стола станка с закрепленной на нем деталью.

Для формирования управляющих электрических сигналов при программном управлении станками используется фотоэлектрическое программное устройство, схема которого приведена на рис. 2 [Л. 25]. Принцип действия программного устройства заключается в слежении подвижной головки за линией, нанесенной на прозрачной ленте.

Лента *2* с нанесенным на ней графиком вращается с постоянной скоростью синхронным двигателем *Д1*. Источником светового сигнала является лампа *4*, световой поток от которой фокусируется объективом *1* на фотоэлектрический приемник излучения $R_ф$. Приемник излучения вместе с резисторами R_1, R_2 и R_3 образует мост на переменном токе. Мост сбалансирован в том случае, когда половина площади приемника излучения *5* перекрывается изображением линии *6* графика.

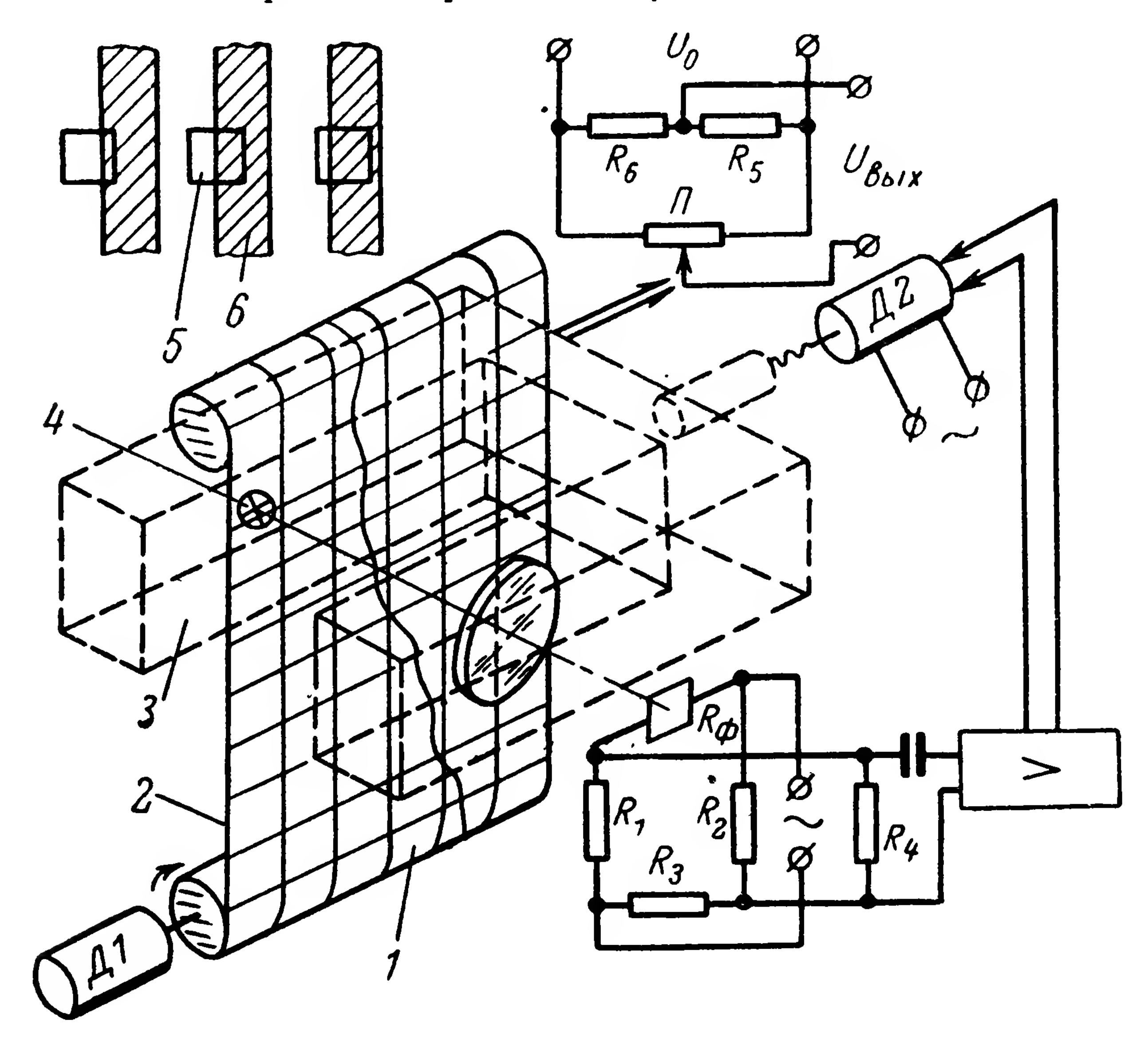


Рис. 2. Схема программного устройства.

1 — объектив; *2* — лента; *3* — подвижная головка; *4* — лампа накаливания; *5* — приемник излучения; *6* — линия чертежа.

При наличии рассогласования между положениями изображения линии и приемника излучения с моста снимается сигнал, фаза которого зависит от знака рассогласования. После усиления этот сигнал подается на двухфазный двигатель *Д2*, который перемещает подвижную головку до устранения рассогласования. С подвижной головкой связан движок потенциометра *П*, с выхода которого снимается сигнал $U_{вых}$, пропорциональный ординате графика.

2. Следящие системы контроля за ходом технологических процессов

Когда о ходе технологического процесса можно судить по прозрачности жидкости, для контроля количественных характеристик этого процесса используют изображенный на рис. 3 фотометр [Л. 24].

Источником света в фотометре служит лампа *4*, световые лучи от которой направляются в два канала с помощью призм *3*. В одном из световых каналов установлена кювета *1* с исследуемой жидкостью, а в другом — оптический клин *5*. Световые потоки в каждом из каналов модулируются в противофазе с помощью диска *2*, вращаемого синхронным двигателем *Д1*.

Если прозрачность кюветы с жидкостью и оптического клина одинаковы, то на фотоэлектрический приемник излучения с помощью призм *6* направляются поочередно равные световые импуль-

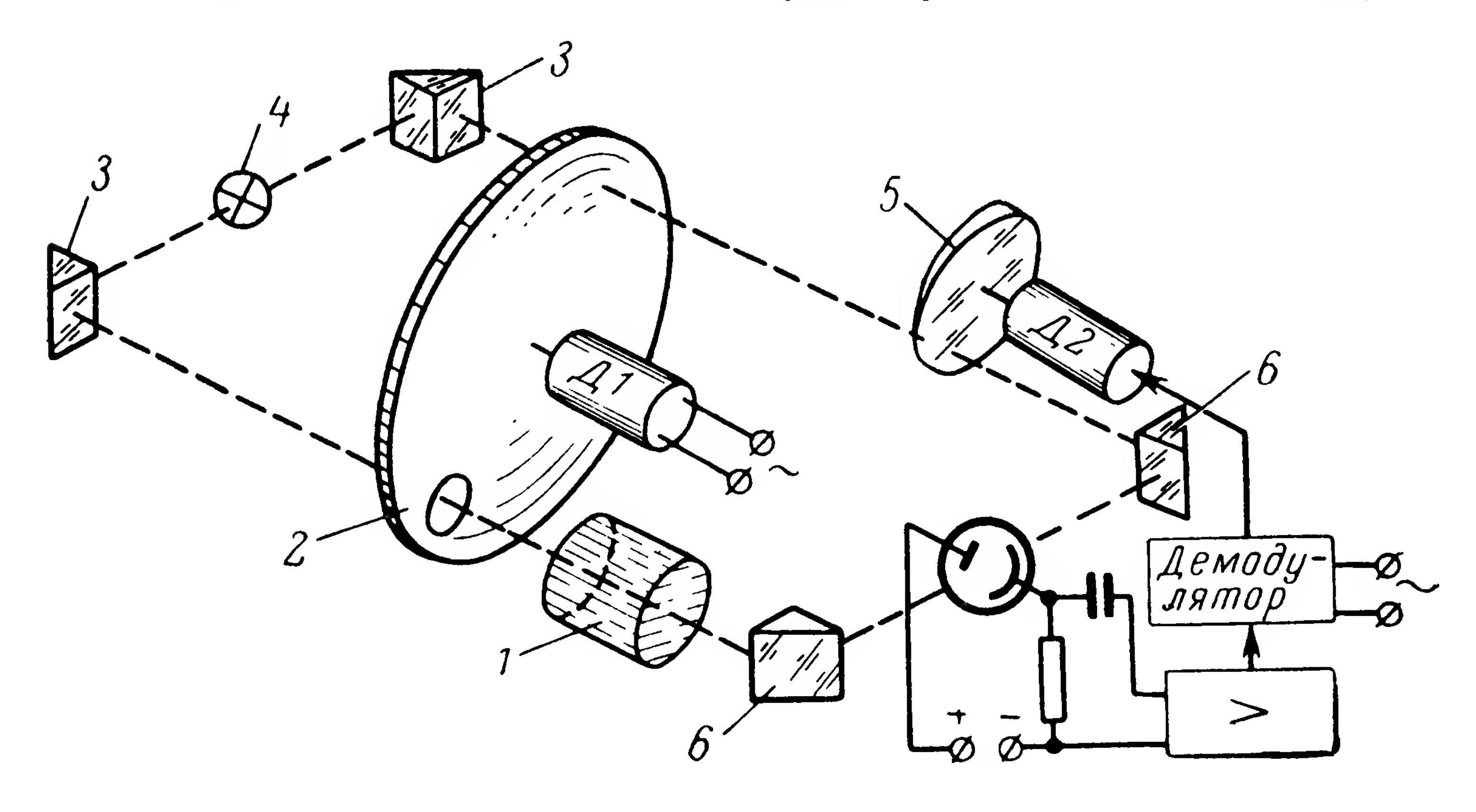


Рис. 3. Схема фотометра.

1 — кювета с жидкостью; *2* — модулятор; *3*, *6* — призмы; *4* — лампа накаливания; *5* — оптический клин.

сы. Сигнал рассогласования на выходе усилителя в этом случае равняется нулю. При неравной прозрачности жидкости и оптического клина на двигатель подается управляющий сигнал, полярность и амплитуда которого зависят от соотношения между прозрачностями жидкости и клина. Двигатель поворачивает клин до тех пор, пока световые потоки, проходящие через жидкость и клин, станут равными. С клином жестко связана шкала, позволяющая количественно оценить степень прозрачности жидкости.

Для контроля за уровнем непрозрачной жидкости в сосуде может служить фотоэлектрическая следящая система, изображенная на рис. 4 [Л. 24]. Если жидкость в сосуде прозрачна, то на ее поверхность можно поместить непрозрачный поплавок, при этом система следит за верхней гранью поплавка.

Световой луч от лампы *1* проходит через прозрачную трубку *3* и падает на приемник излучения, включенный в мостовую схему на переменном токе. Мост находится в сбалансированном состоянии в случае, когда половина площади приемника излучения *4* затеняется жидкостью *5*. При нарушении этого условия с моста снимается сигнал рассогласования, который после усиления подается на двухфазный реверсивный двигатель. Двигатель перемещает следящую головку *2* вверх или вниз до устранения рассогласования. Одновременно двигатель вращает шкалу отсчетного устройства, фиксирующего уровень жидкости.

Дистанционное измерение температуры излучающих объектов производится с помощью фотоэлектрических пирометров. На рис. 5 приведена схема одного из вариантов пирометра [Л. 25].

Световой поток от объекта *1* фокусируется с помощью объектива *2* на приемнике излучения. С объективом совмещен светофильтр,

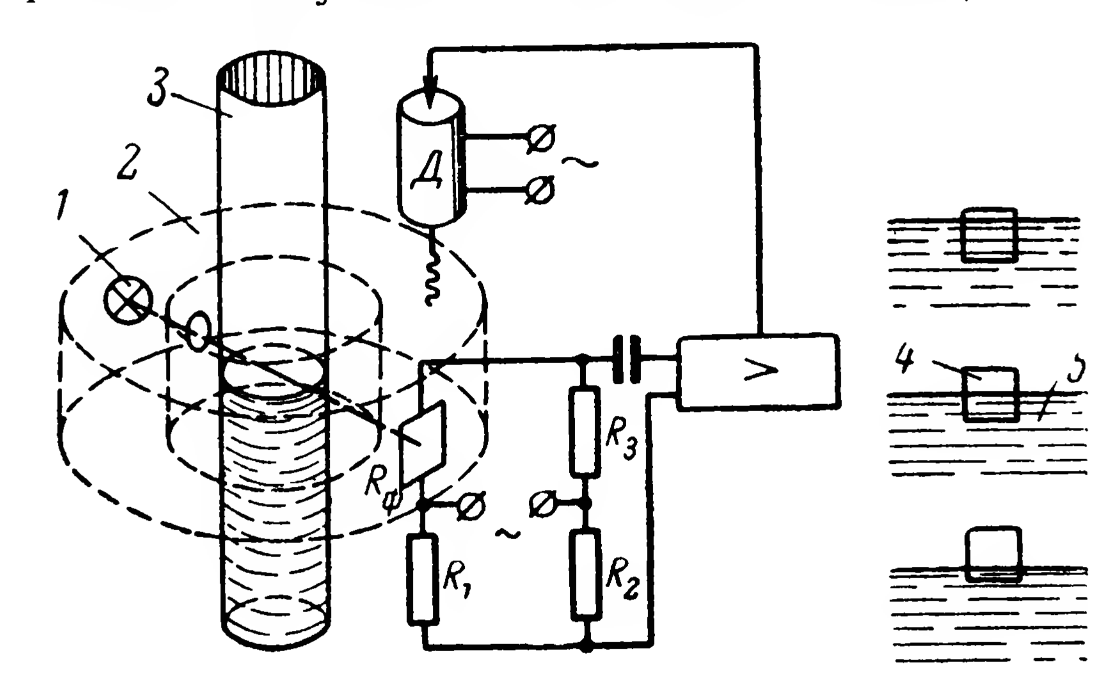


Рис. 4. Схема системы слежения за уровнем жидкости.

1 — лампа накаливания; *2* — следящая головка; *3* — труба; *4* — приемник излучения; *5* — жидкость.

позволяющий выделить из спектра излучающего объекта узкую полосу.

Сигнал рассогласования снимается с моста, образованного приемником излучения и потенциометром *П*. Под действием усиленного сигнала рассогласования реверсивный двигатель на постоянном

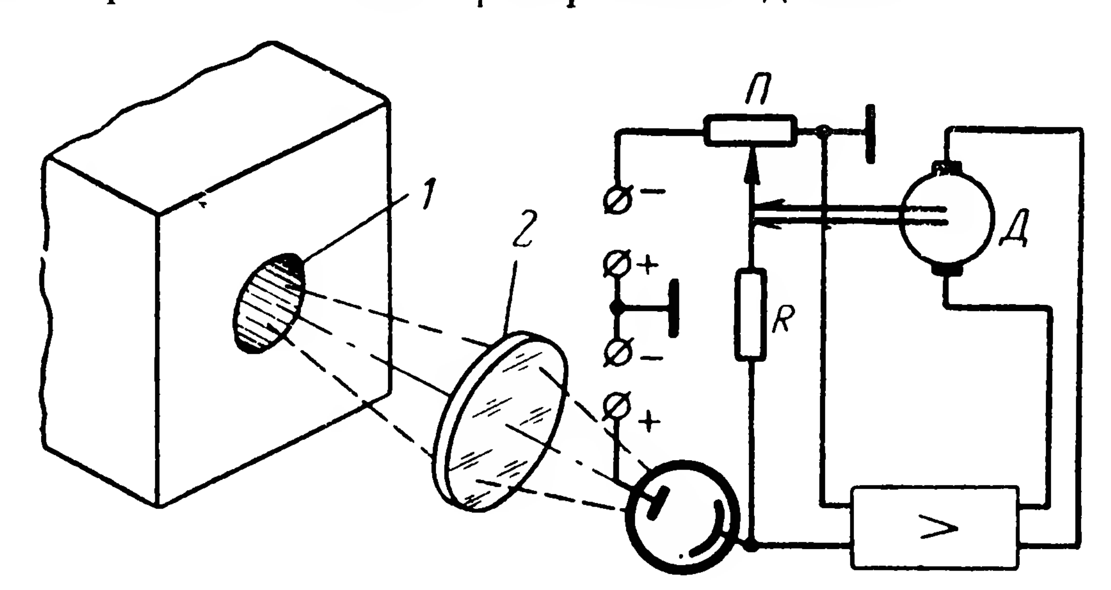


Рис. 5. Схема пирометра.

1 — излучающий объект; *2* — объектив.

токе перемещает движок потенциометра до того момента, пока мост будет сбалансирован. С движком потенциометра связана шкала, по которой производится отсчет температуры излучающего объекта.

3. Следящая система измерения слабых токов

Для измерения слабых токов и напряжений применяется фотоэлектрическая система, изображенная на рис. 6 [Л. 22]. Она позволяет значительно усиливать измеряемое напряжение и увеличивать тем самым точность измерения.

Измеряемое напряжение $u_{вх}$ подается во входную цепь гальванометра, на подвижной части которого установлено зеркало *1*. Угол поворота зеркала вокруг вертикальной оси пропорционален измеряемому напряжению. На зеркало падает световой луч от лампы *2*. Отраженный луч фокусируется объективом *3* на приемники излучения *4*. Приемники излучения совместно с резисторами R_1 и R_2 образуют мост, питаемый переменным током. Если световой луч *5*

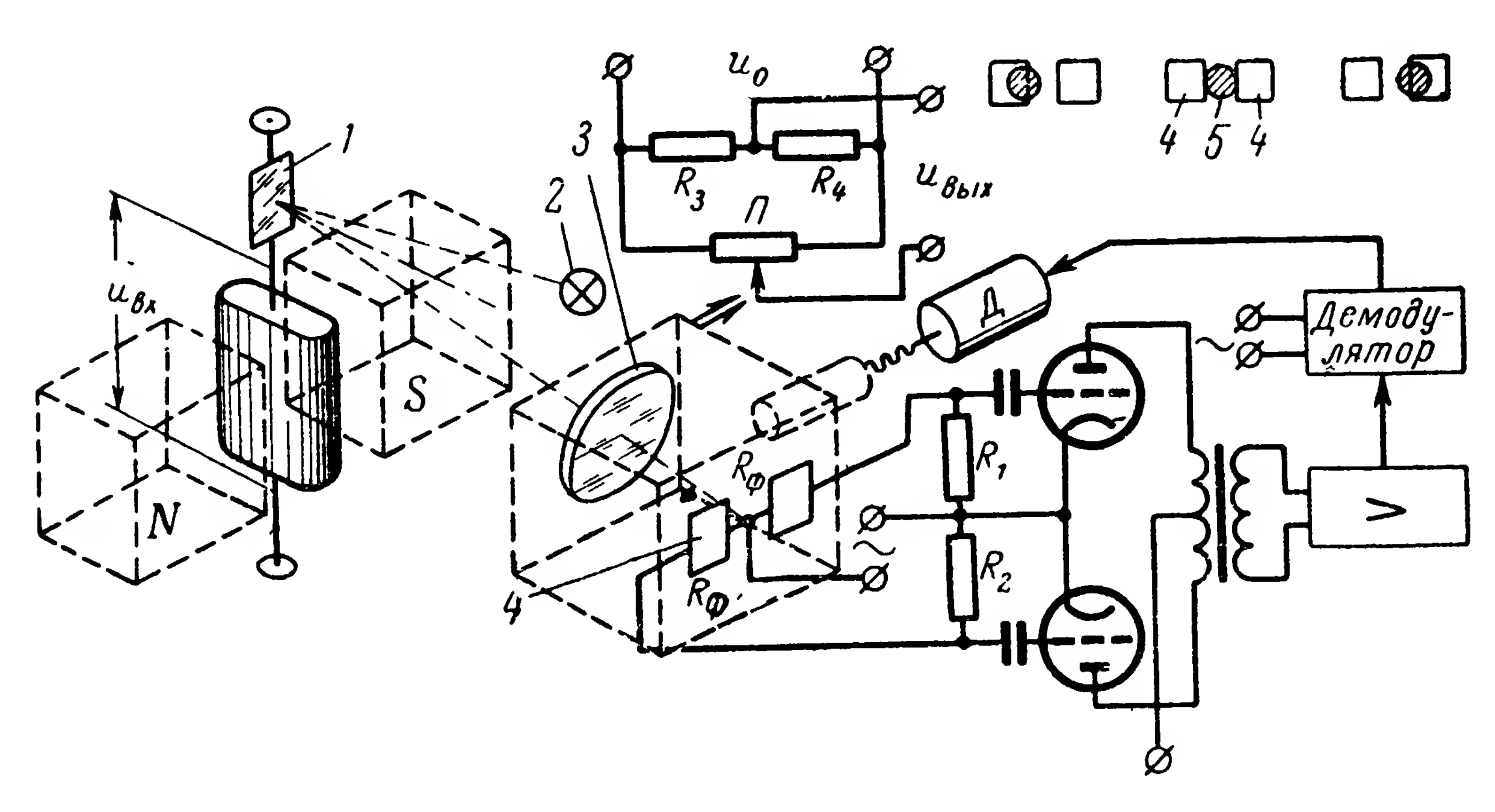


Рис. 6. Схема гальванометра.

1 — зеркало; *2* — лампа накаливания; *3* — объектив; *4* — приемник излучения; *5* — изображение лампы.

падает посередине между приемниками излучения, то мост сбалансирован и снимаемый с него сигнал рассогласования равен нулю. Это будет в том случае, когда измеряемое напряжение равняется нулю и зеркало находится в начальном положении.

При измерении напряжения зеркало поворачивается на некоторый угол и отраженный от него световой луч падает на один из приемников излучения. Сигнал рассогласования, снимаемый с фоторезистора, усиливается и преобразуется демодулятором. На выходе демодулятора возникает постоянный сигнал, знак которого соответствует направлению отклонения зеркала. Под действием постоянного сигнала рассогласования реверсивный двигатель перемещает каретку до того момента, пока отраженный от зеркала луч будет падать точно между приемниками излучения.

С кареткой связан движок потенциометра, образующего вместе с резисторами R_3 и R_4 мост на постоянном токе. Снимаемое с моста напряжение $u_{вых}$ пропорционально измеряемому напряжению $u_{вх}$.

4. Системы слежения за угловым положением излучающих объектов

На рис. 7 изображена схема фотоэлектрического телескопа, ось которого непрерывно следит за угловым положением небесного светила. Такие фотоэлектрические телескопы применяются в навига-

ционных устройствах самолетов и системах астрономического ориентирования ракет и космических станций [Л. 15].

Телескоп закреплен в карданном подвесе, в котором его ось может перемещаться по азимуту и углу места.

Световой поток от небесного светила *1* фокусируется объективом *2* в плоскости анализатора *3*. В качестве анализатора служит вращающийся двигателем *Д1* полудиск. На выходе анализатора световой поток оказывается промодулированным по фазе и амплитуде. Фаза светового сигнала определяется фазовым углом ψ, характеризующим направление углового рассогласования между визирной

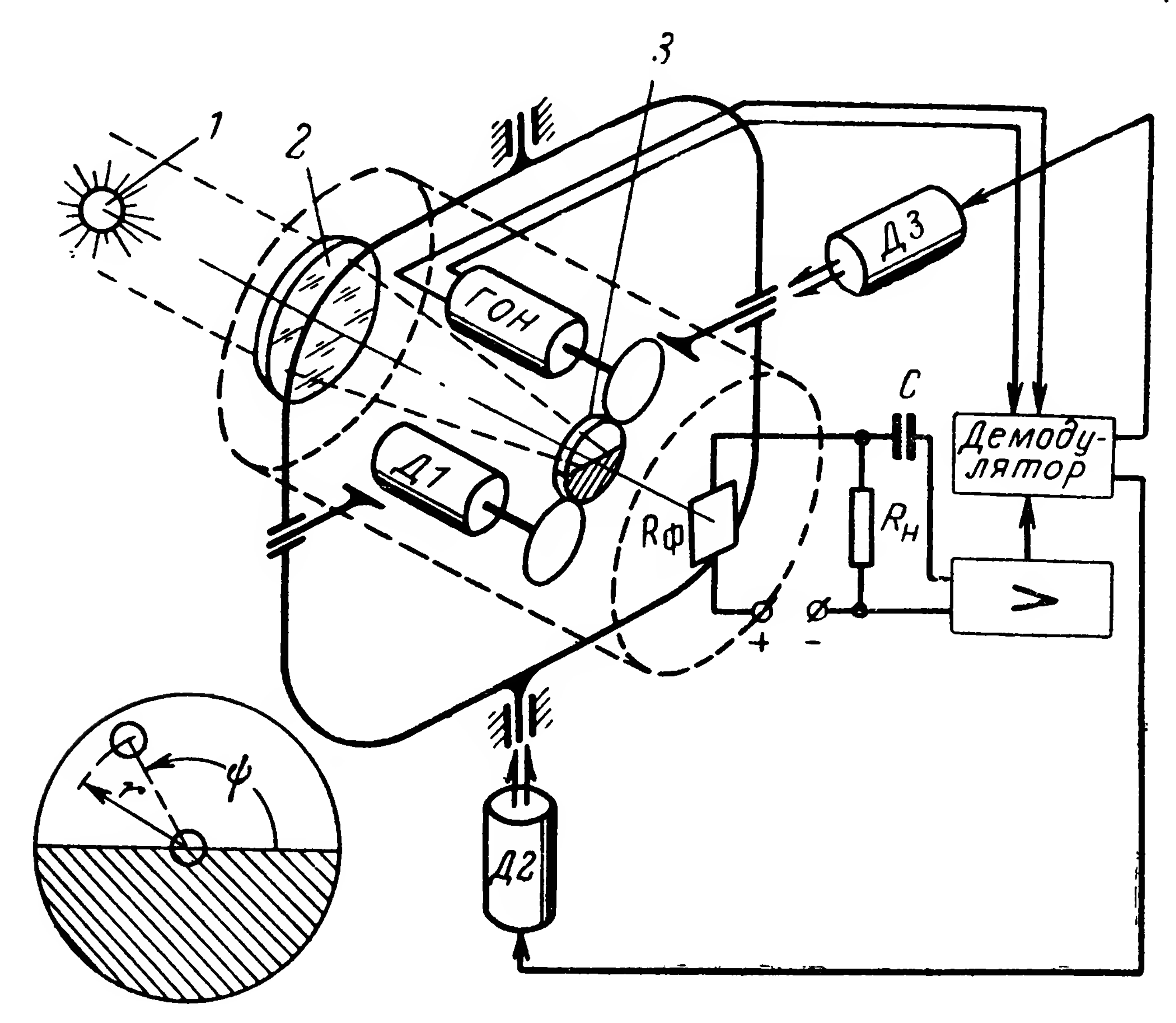


Рис. 7. Схема фотоэлектрического телескопа.

1 — небесное светило; *2* — объектив; *3* — анализатор

осью телескопа и направлением на небесное светило. Амплитуда светового сигнала зависит от величины r смещения изображения светила относительно центра вращения анализатора. В свою очередь величина смещения изображения светила пропорциональна величине угла рассогласования между визирной осью и направлением на светило.

Когда визирная ось телескопа совмещена с направлением на светило, амплитуда переменной составляющей светового сигнала на выходе анализатора равна нулю. Так как на входе усилителя установлен разделительный конденсатор *С*, то постоянный электрический сигнал, возникающий при засветке приемника излучения постоянным световым потоком, не усиливается.

При отклонении визирной оси телескопа от направления на светило с приемника излучения снимается переменный сигнал, который после усиления подается на демодулятор вместе с опорным напряжением. Генератор опорного напряжения *ГОН* вращается синхронно

с анализатором. Он вырабатывает два опорных напряжения, сдвинутых относительно друг друга на 90°. Одно из опорных напряжений вместе с сигналом рассогласования используется для выработки постоянного управляющего напряжения, подаваемого на азимутальный привод телескопа, а второе — на привод угла места. Двигатели *Д2* и *Д3* вращают телескоп по азимуту и углу места до совмещения его визирной оси с направлением на небесное светило.

Для управления движением авиационных самонаводящихся ракет используются следящие координаторы цели, действие которых основано на использовании инфракрасного излучения воздушных целей. На рис. 8 приведена схема следящего координатора с гироскопическим исполнительным устройством [Л. 21].

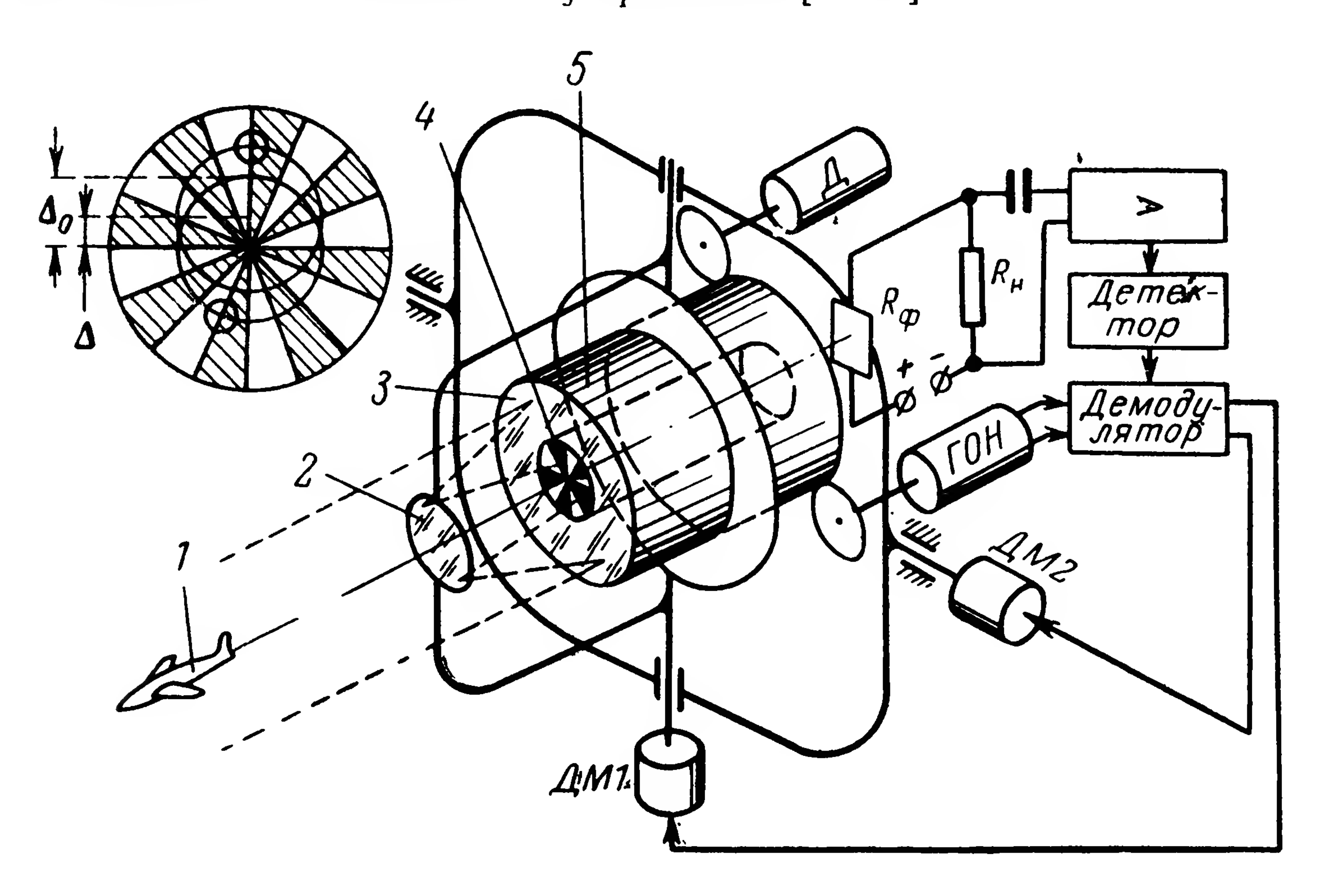


Рис. 8. Схема координатора.

1 — источник излучения; *2, 3* — зеркальный объектив; *4* — анализатор; *5* — ротор гироскопа.

Полый ротор *5* гироскопа вращается синхронным двигателем. На передней поверхности ротора установлено зеркало *3*, которое отражает инфракрасное излучение от цели на второе зеркало *2*. С помощью системы из двух зеркал инфракрасное излучение фокусируется в плоскости анализатора *4*. Анализатор жестко скреплен с ротором гироскопа и вращается с частотой вращения ротора ω_t, поэтому инфракрасное излучение на выходе анализатора оказывается промодулированным. Модулированное излучение падает на приемник, включенный на входе усилителя сигнала рассогласования.

Если визирная ось координатора совпадает с направлением на цель, то изображение цели описывает в плоскости анализатора окружность радиуса Δ_0 с центром, совпадающим с центром анализатора. В этом случае инфракрасное излучение модулируется с постоянной частотой $\omega_{tн}$.

При наличии угла рассогласования Δ между визирной осью координатора и направлением на цель частота колебаний инфракрасного излучения на выходе анализатора в течение одного его оборота

будет меняться. Девиация частоты определяется выражением

$$\Delta\omega t = \omega_{t\text{н}} \frac{\Delta}{\Delta_0}.$$

Текущая частота колебаний равна:

$$\omega_t(t) = \omega_{t\text{н}} \left[1 + \frac{\Delta}{\Delta_0} \sin(\omega_t t + \psi)\right],$$

где ω_t — круговая частота вращения анализатора.

Из приведенного выражения следует, что частота линейно зависит от угла рассогласования Δ.

Частотно-модулированные колебания усиливаются и детектируются. На выходе частотного детектора сигнал имеет синусоидальную форму. Его амплитуда зависит от величины угла рассогласования, а фаза — от знака этого угла. С выхода демодулятора, куда кроме сигнала рассогласования подаются два сдвинутых по фазе опорных напряжения, снимаются постоянные управляющие напряжения.

Управляющие напряжения подаются на моментные датчики, установленные на осях карданного подвеса гироскопа. При прикладывании момента к одной из осей подвеса гироскопа в соответствии с правилом прецессии вектор кинетического момента $\vec{H}$ стремится совместиться с вектором приложенного момента $\vec{M}$ по кратчайшему пути. Отсюда следует, что момент, приложенный к горизонтальной оси подвеса, заставляет гироскоп прецессировать вокруг вертикальной оси.

Прецессионное движение гироскопа будет длиться до того момента, пока на него подается управляющее напряжение. Когда визирная ось координатора совместится с направлением на цель, прецессионное движение гироскопа прекратится.

5. Следящие системы измерения угловых величин

Фотоэлектрические устройства измерения угловых величин получили наиболее широкое распространение в геодезических приборах и системах прицеливания баллистических ракет.

На рис. 9 изображена схема следящей системы [Л. 15], служащей для измерения малых угловых величин между визирной осью угломера и перпендикуляром к зеркалу *7*.

Источником светового сигнала является двухфазная ртутная лампа *5*, которая питается выпрямленным с помощью диодов напряжением. Так как диоды включены в цепь питания каждого из плеч лампы различным способом, то каждая из половин лампы будет зажигаться поочередно через половину периода. Следовательно, фазы световых потоков, излучаемых половинами лампы, сдвинуты на 180°.

Обе части светового потока входят в призму *4*, где сдвигаются навстречу друг другу. Световой поток, излучаемый средней частью лампы, отражается призмой в сторону, поэтому граница раздела световых потоков различных фаз становится резкой.

Сдвинутые по фазе световые потоки отражаются от полупрозрачного зеркала *3* и в виде двух параллельных пучков выходят из объектива *6*. Отраженные от зеркала *7* световые лучи фокусируются

объективом, проходят полупрозрачное зеркало и вращающуюся плоскопараллельную пластину *2* и падают на анализатор *1*. Анализатором является узкая щель в непрозрачной диафрагме, через которую световой сигнал проходит на приемник излучения.

В случае, когда плоскость зеркала *7* перпендикулярна визирной оси угломера, через щель на приемник излучения падают световые потоки *8* и *9* обеих фаз, равные по амплитуде. Сигнал рассогласования, вырабатываемый демодулятором, при этом равняется нулю.

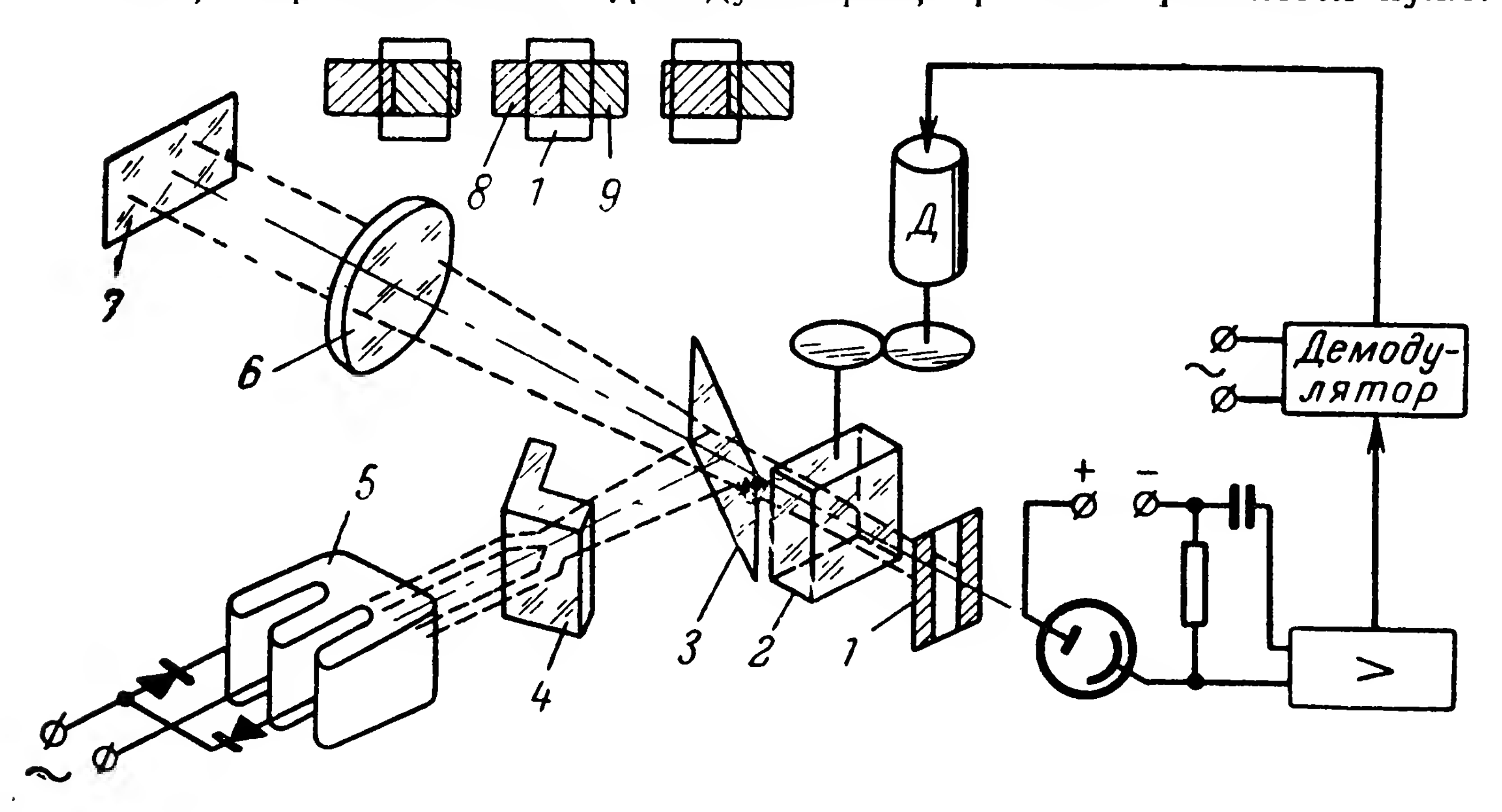


Рис. 9. Схема фотоэлектрического угломера.

1 — анализатор; *2* — пластина; *3* — полупрозрачное зеркало; *4* — призма; *5* — ртутная лампа; *6* — объектив; *7* — зеркало; *8*, *9* — изображения лампы.

Если же между визирной осью и перпендикуляром к зеркалу имеется некоторый угол, то амплитуда одной из составляющих светового потока будет больше, а другой — меньше. На выходе усилителя будет синусоидальный сигнал, амплитуда которого определяется величиной измеряемого угла, а фаза — его знаком. На вход демодулятора, кроме сигнала рассогласования, подается переменное опорное напряжение, частота которого равна частоте напряжения питания ртутной лампы.

Постоянный сигнал с демодулятора подается на реверсивный двигатель, вращающий вокруг вертикальной оси плоскопараллельную пластину. Поворот пластины вызывает смещение проходящих через нее световых пучков. Двигатель вращает пластину до тех пор, пока граница раздела световых потоков различных фаз не совместится с серединой щели.

По величине угла поворота плоскопараллельной пластины можно судить о величине измеряемого углового рассогласования между визирной осью угломера и перпендикуляром к зеркалу.

Система прицеливания баллистической ракеты приведена на рис. 10 [Л. 15, 49]. Прицеливание заключается в предстартовом ориентировании гиростабилизированной платформы ракеты относительно плоскости стрельбы. После пуска ракеты гиростабилизированная платформа сохраняет неизменной свою ориентацию в пространстве, независимо от движения корпуса ракеты. На платформе установлено три гироскопа *2*, каждый из них имеет датчик угла

прецессии *1* и датчик момента *3*. Если на платформу действует возмущающий момент вокруг вертикальной оси, то этот момент вызы-
угла прецессии снимается сигнал рассогласования, который после
вает прецессию гироскопа вокруг горизонтальной оси. С датчика
усиления подается на двигатель *Д2* стабилизации платформы по азимуту. Двигатель прикладывает к вертикальной оси момент, равный возмущающему и противоположно направленный, компенсируя тем самым его действие.

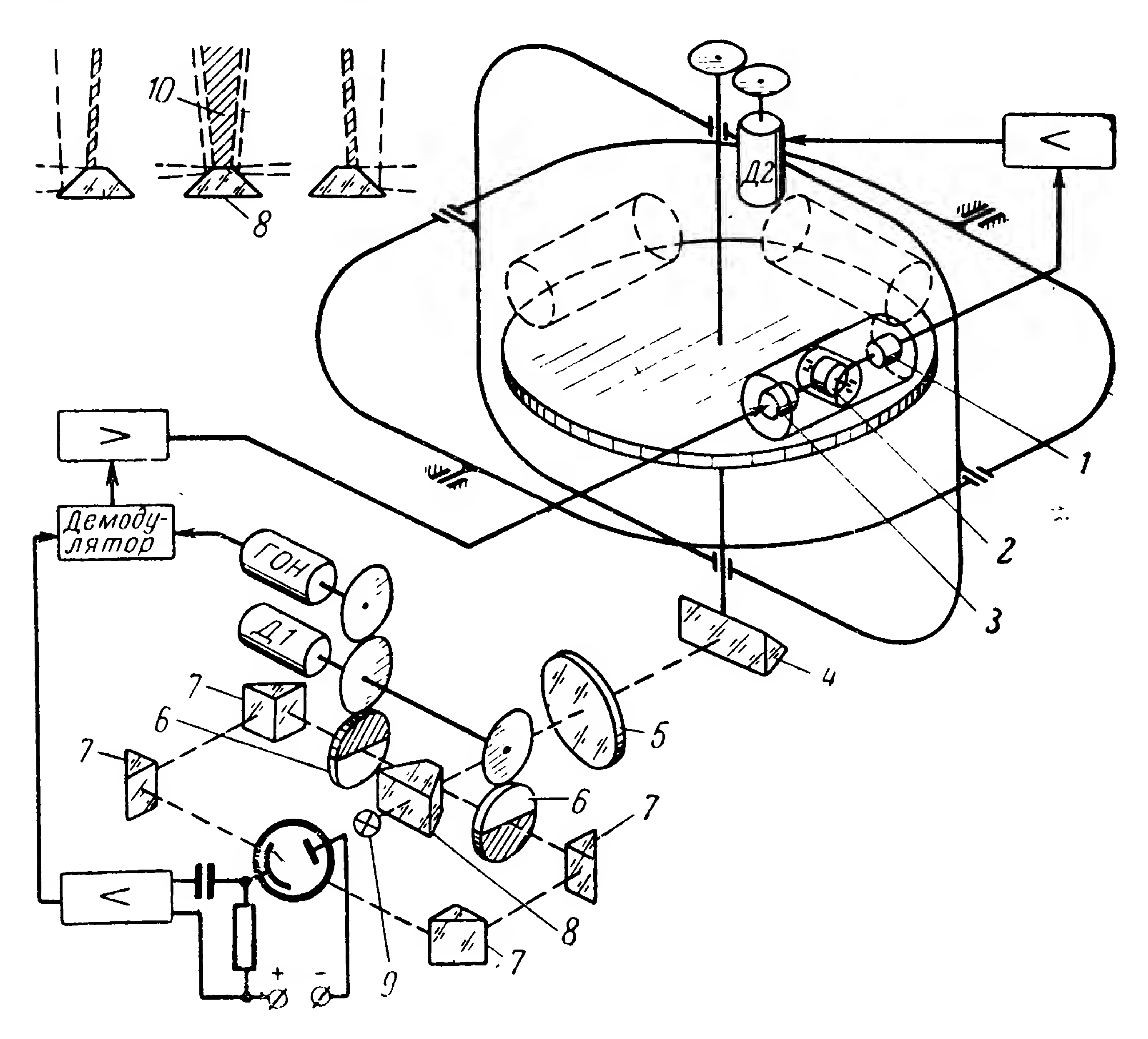


Рис. 10. Схема системы прицеливания.

1 — датчик угла; *2* — гироскоп; *3* — датчик момента; *4* — призма; *5* — объектив; *6* — модулятор; *7* — призма; *8* — анализатор; *9* — лампа накаливания; *10* — световые лучи.

Система прицеливания включает фотоэлектрический угломер и гиростабилизированную платформу с установленной на ней прямоугольной призмой *4*. Перед прицеливанием визирная ось угломера устанавливается строго в направлении стрельбы. Платформа при прицеливании поворачивается по азимуту до тех пор, пока призма станет перпендикулярна визирной оси угломера.

Источником светового сигнала в угломере является лампа накаливания *9*. Световые лучи проходят через переднюю грань призмы *8* и выходят параллельным пучком из объектива *5*. Отраженные от призмы *4* световые лучи фокусируются объективом в плоскости передней грани призмы *8*.

Если визирная ось угломера перпендикулярна призме *4*, то световые лучи *10* фокусируются симметрично относительно передней грани призмы *8*. Часть световых лучей проходит через переднюю грань и не используется в формировании сигнала рассогласования. Две другие части светового потока, равные по амплитуде, отражаются от боковых зеркальных граней призмы *8* и модулируются в противофазе вращающимися полудисками *6*. С помощью призм *7* обе части светового потока направляются на приемник излучения. Суммарный световой сигнал, действующий на приемник излучения, будет постоянным, поэтому сигнал рассогласования на выходе усилителя равен нулю.

В случае, когда призма *4* неперпендикулярна визирной оси угломера, амплитуды частей светового потока, модулированных в противофазе, не равны друг другу. На выходе усилителя при этом возникает сигнал рассогласования, амплитуда которого зависит от величины угла между визирной осью угломера и перпендикуляром к призме *4*, а фаза — от знака этого угла.

На выходе демодулятора, куда подается сигнал рассогласования и опорное напряжение с генератора, вращающегося с той же частотой, что и модулирующие диски, возникает управляющий сигнал. Этот сигнал подается на моментный датчик *3* гироскопа, создающий момент вокруг его горизонтальной оси. Под действием момента платформа, на которой установлен гироскоп, прецессирует по азимуту. Прецессия будет продолжаться до тех пор, пока перпендикуляр к призме не совпадет с визирной осью угломера, а следовательно, и с плоскостью стрельбы.

Глава вторая

СВЕТОВЫЕ СИГНАЛЫ

6. Энергетические характеристики сигналов

Энергетические характеристики световых сигналов делятся на две группы: спектральные и интегральные.

Спектральная характеристика определяет распределение энергии сигнала по электромагнитному спектру излучений. В зависимости от типа спектральной характеристики световые сигналы бывают монохроматическими и немонохроматическими, т. е. имеют сложный спектральный состав.

Спектр излучения абсолютно черного тела определяется формулой Планка

$$r(\lambda, T) = c_1 \lambda^{-5} \left(e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1 \right)^{-1}, \qquad (1)$$

где λ — длина волны;

T — абсолютная температура;

$c_1 = 3{,}739 \cdot 10^{-12}$ *вт · см*^{2} и $c_2 = 1{,}438$ *см · град* — постоянные величины.

Спектральные характеристики $\Phi(\lambda)$ реальных источников излучения отличаются от спектра излучения абсолютно черного тела. Наиболее близко к спектру абсолютно черного тела приближается

излучение ламп накаливания. Газосветные лампы обладают весьма сложной структурой спектральной характеристики, зависящей от характеристик заполняющих их газов. Лазеры обладают монохроматическим спектром излучений.

При рассмотрении характеристик сигналов пользуются двумя системами единиц: энергетической и световой.

Основной энергетической единицей является лучистый поток, измеряемый в ваттах. Лучистая энергия измеряется в джоулях.

Основная интегральная характеристика светового излучения — сила света. Единицей силы света является свеча. Размер свечи определяется специальным световым эталоном. Кроме силы света существуют и производные интегральные характеристики излучения: световой поток, яркость, освещенность и др.

Важнейшие энергетические и световые характеристики излучения приведены в табл. 1.

Таблица 1

Энергетические		Световые		Определяющие формулы
Характеристика	Единица измерения	Характеристика	Единица измерения	
Сила излучения	$\frac{вт}{стер}$	Сила света	Свеча, *св*	$I = \frac{d\Phi}{d\Omega}$
Лучистый поток	*вт*	Световой поток	Люмен, *лм*	$\Phi = \int I d\Omega$
Лучистая энергия	*дж*	Световая энергия	Люмен-секунда, *лм-сек*	$L = \int \Phi dt$
Плотность излучения	$\frac{вт}{м^2}$	Светность	Люмен на $м^2$, $лм/м^2$	$R = \frac{d\Phi}{dS_1}$
Лучистость	$\frac{вт}{м^2 \cdot стер}$	Яркость	*Нит, нт*	$B = \frac{dI}{dS_1 \cos \varepsilon}$
Облученность	$\frac{вт}{м^2}$	Освещенность	Люкс, *лк*	$E = \frac{d\Phi}{dS_2}$

В таблице приведены следующие обозначения: Ω — телесный угол, *стер*; S_1 — площадь излучателя, $м^2$; S_2 — площадь облучаемой поверхности, $м^2$; ε — угол между нормалью к облучаемой поверхности и направлением распространения светового луча.

Из приведенных характеристик светность (плотность излучения) и яркость (лучистость) относятся к источнику излучения, а освещенность (облученность) — к поверхности, воспринимающей излучение.

Для абсолютно черного тела имеется аналитическая связь между спектральной характеристикой и интегральной — плотностью из-

лучения (светностью)

$$R=\int_0^\infty r(\lambda, T)\,d\lambda.$$

Связь между лучистым и световым потоками определяется коэффициентом

$$k=683, \text{ лм/вт}.$$

Этот коэффициент относится к длине волны излучения $\lambda_m=0{,}555$ *мк*, соответствующей максимуму спектральной чувствительности человеческого глаза. Он носит наименование светового эквивалента лучистого потока.

7. Представление сигналов многомерными интегралами Фурье

Ранее было рассмотрено, что световой сигнал является функцией длины волны электромагнитного спектра излучений. Кроме того, световые сигналы могут быть функциями еще трех переменных: угловых пространственных координат α, β и времени t. Для описания многомерных световых сигналов пользуются двумя видами характеристик: пространственно-временной формой и спектральным распределением.

Если световой сигнал периодически повторяется в пространстве и времени, то он может быть разложен на элементарные гармонические сигналы. Условие периодичности стигнала может быть записано в следующем виде:

$$f(\alpha, \beta, t)=f(\alpha+nT_\alpha, \beta+mT_\beta, t+kT_t),$$

где T_α, T_β и T_t — периоды повторения сигнала.

Элементарный гармонический сигнал (рис. 11,*а*) представляет собой пространственную волну (рис. 11,*б*), бесконечно продолжающуюся в пространстве.

Бесконечно повторяющийся сигнал и бесконечная пространственная волна являются математической абстракцией вследствие ограниченности углового пространства. Однако она является полезной, так как позволяет представлять периодические световые сигналы рядами Фурье

$$f(\alpha, \beta, t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_{nmk}e^{j(n\omega_{\alpha 1}\alpha+m\omega_{\beta 1}\beta+k\omega_{t1}t)}, \qquad (2)$$

где $\omega_{\alpha 1}=2\pi/T_\alpha$, $\omega_{\beta 1}=2\pi/T_\beta$, $\omega_{t1}=2\pi/T_t$ — частоты первых гармоник сигнала; c_{nmk} — комплексный коэффициент, определяемый интегралом

$$c_{nmk}=\frac{1}{T_\alpha T_\beta T_t}\int_{-\frac{T_\alpha}{2}}^{\frac{T_a}{2}}\int_{-\frac{T_\beta}{2}}^{\frac{T_\beta}{2}}\int_{-\frac{T_t}{2}}^{\frac{T_t}{2}} f(x, y, z)\times$$

$$\times e^{-j(n\omega_{\alpha 1}x+m\omega_{\beta 1}y+k\omega_{t1}z)}dx\,dy\,dz.$$

Вещественная форма записи ряда имеет вид:

$$f(\alpha, \beta, t) = a_{000} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} [a_{nmk} \cos(n\omega_{\alpha 1}\alpha + m\omega_{\beta 1}\beta + k\omega_{t_1}t) + b_{nmk} \sin(n\omega_{\alpha 1}\alpha + m\omega_{\beta 1}\beta + k\omega_{t_1}t)], \quad (3)$$

при этом коэффициенты ряда определяются формулами

$$a_{nmk} = \frac{8}{T_\alpha T_\beta T_t} \int_{-\frac{T_\alpha}{2}}^{\frac{T_\alpha}{2}} \int_{-\frac{T_\beta}{2}}^{\frac{T_\beta}{2}} \int_{-\frac{T_t}{2}}^{\frac{T_t}{2}} f(x, y, z) \times \cos(n\omega_{\alpha 1}x + m\omega_{\beta 1}y + k\omega_{t_1}z)\, dx\, dy\, dz;$$

$$b_{nmk} = \frac{8}{T_\alpha T_\beta T_t} \int_{-\frac{T_\alpha}{2}}^{\frac{T_\alpha}{2}} \int_{-\frac{T_\beta}{2}}^{\frac{T_\beta}{2}} \int_{-\frac{T_t}{2}}^{\frac{T_t}{2}} f(x, y, z) \times \sin(n\omega_{\alpha 1}x + m\omega_{\beta 1}y + k\omega_{t_1}z)\, dx\, dy\, dz.$$

Между вещественными коэффициентами ряда и комплексным коэффициентом имеется следующая зависимость:

$$2c_{nmk} = a_{nmk} - jb_{nmk}.$$

При гармоническом анализе непериодических световых сигналов необходимо воспользоваться многомерным интегралом Фурье, который получается из ряда Фурье путем предельного перехода. Подставляя в формулу (2) значение комплексного коэффициента, получаем:

$$f(\alpha, \beta, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_\alpha T_\beta T_t} \left[\int_{-\frac{T_\alpha}{2}}^{\frac{T_\alpha}{2}} \int_{-\frac{T_\beta}{2}}^{\frac{T_\beta}{2}} \int_{-\frac{T_t}{2}}^{\frac{T_t}{2}} \times f(\alpha, \beta, t)\, e^{-j(n\omega_{\alpha 1}\alpha + m\omega_{\beta 1}\beta + k\omega_{t_1}t)} d\alpha\, d\beta\, dt \right] e^{j(n\omega_{\alpha 1}\alpha + m\omega_{\beta 1}\beta + k\omega_{t_1}t)}.$$

После замены периодов повторения сигнала частотами первых гармоник имеем:

$$f(\alpha, \beta, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\frac{T_\alpha}{2}}^{\frac{T_\alpha}{2}} \int_{-\frac{T_\beta}{2}}^{\frac{T_\beta}{2}} \int_{-\frac{T_t}{2}}^{\frac{T_t}{2}} \times \right.$$

$$\left. \times f(\alpha, \beta, t)\, e^{-j(n\omega_{\alpha 1}\alpha + m\omega_{\beta 1}\beta + k\omega_{t_1}t)}\, d\alpha\, d\beta\, dt \right] e^{j(n\omega_{\alpha 1}\alpha + m\omega_{\beta 1}\beta + k\omega_{t_1}t)} \times$$

$$\times\, \omega_{\alpha 1}\omega_{\beta 1}\omega_{t 1}.$$

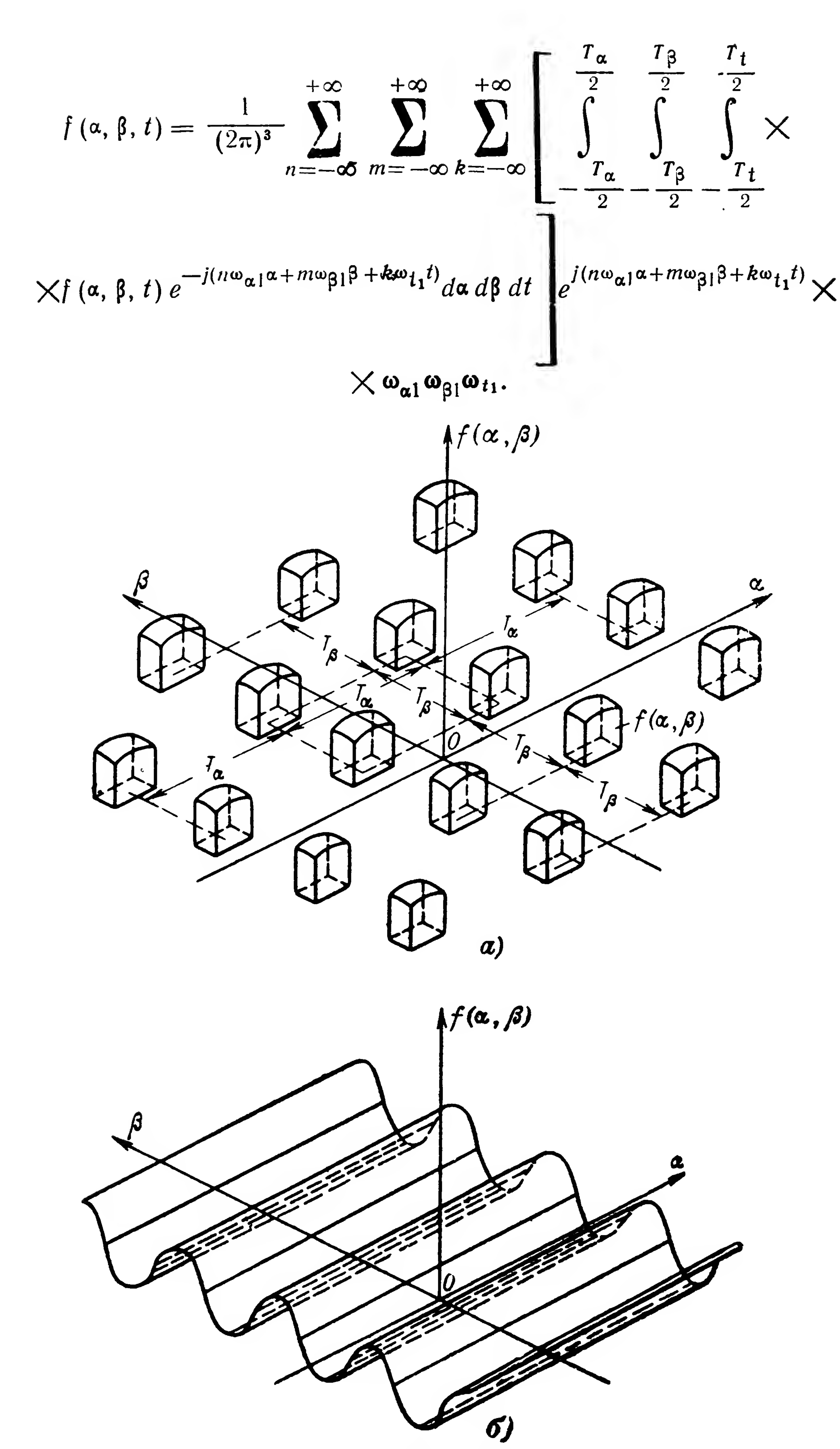


Рис. 11. Периодический сигнал.

а — форма сигнала; б — пространственная волна.

Если $T_\alpha \to \infty$, $T_\beta \to \infty$ и $T_t \to \infty$, то частоты первых гармоник $\omega_{\alpha 1}$, $\omega_{\beta 1}$ и ω_{t1} превращаются в дифференциалы $d\omega_\alpha$, $d\omega_\beta$, $d\omega_t$, а дискретные ряды частот $n\omega_{\alpha 1}$, $m\omega_{\beta 1}$ и $k\omega_{t1}$ — в текущие частоты ω_α, ω_β и ω_t, поэтому

$$f(\alpha, \beta, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha, \beta, t) \times \right.$$

$$\left. \times e^{-j(\omega_\alpha \alpha + \omega_\beta \beta + \omega_t t)} d\alpha d\beta dt \right] e^{j(\omega_\alpha \alpha + \omega_\beta \beta + \omega_t t)} d\omega_\alpha d\omega_\beta d\omega_t.$$

Внутренний интеграл

$$F(j\omega_\alpha, j\omega_\beta, j\omega_t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha, \beta, t)\, e^{-j(\omega_\alpha \alpha + \omega_\beta \beta + \omega_t t)} d\alpha d\beta dt \qquad (4)$$

является прямым преобразованием Фурье сигнала $f(\alpha, \beta, t)$, а внешний

$$f(\alpha, \beta, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega_\alpha, j\omega_\beta, j\omega_t) \times$$

$$\times e^{j(\omega_\alpha \alpha + \omega_\beta \beta + \omega_t t)} d\omega_\alpha d\omega_\beta d\omega_t — \qquad (5)$$

— обратным преобразованием Фурье.

Функцию $F(j\omega_\alpha, j\omega_\beta, j\omega_t)$ называют комплексным спектром сигнала.

Преобразование Фурье можно представить и в векторной форме. Для этого необходимо ввести пространственный вектор частоты $\vec{\omega}$ и векторную угловую координату $\vec{\rho}$ точки пространства. Если рассматривать сигнал как функцию двух переменных, то вектор частоты допускает простое физическое толкование

$$|\vec{\omega}| = \sqrt{\omega_\alpha^2 + \omega_\beta^2};$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\omega_\alpha}{\omega_\beta},$$

где фаза γ — угол, характеризующий направление линии, соединяющей гребни пространственного вектора частоты.

После введения векторных аргументов прямое и обратное преобразования Фурье могут быть представлены в следующем виде:

$$F(j\vec{\omega}) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{\rho})\, e^{-j\vec{\omega}\vec{\rho}} d\vec{\rho}; \qquad (6)$$

$$f(\vec{\rho}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(j\vec{\omega}) e^{j\vec{\omega}\vec{\rho}} d\vec{\omega}. \qquad (7)$$

Таблица 2

Наименование свойств	Соотношения между сигналами	Соотношения между преобразованиями
Линейность преобразования	$f(\vec{\rho}) = af_1(\vec{\rho}) + bf_2(\vec{\rho})$	$F(j\vec{\omega}) = aF_1(j\vec{\omega}) + bF_2(j\vec{\omega})$
Преобразование от производной	$f(\vec{\rho}) = f_1^{(n)}(\vec{\rho})$	$F(j\vec{\omega}) = (j\vec{\omega})^n F_1(j\vec{\omega})$
Преобразование от интеграла	$f(\vec{\rho}) = \int\limits_{-\infty}^{\vec{\rho}} f_1(\vec{r})\, d\vec{r}$	$F(j\vec{\omega}) = \frac{1}{j\vec{\omega}} F_1(j\vec{\omega})$
Преобразование смещенного сигнала	$f(\vec{\rho}) = f_1(\vec{\rho} + \vec{r})$	$F(j\vec{\omega}) = e^{-j\vec{\omega}\vec{r}} F_1(j\vec{\omega})$
Преобразование сумм смещенных сигналов	$f(\vec{\rho}) = f_1(\vec{\rho} - \vec{r}) + f_1(\vec{\rho} + \vec{r})$	$F(j\vec{\omega}) = 2F_1(j\vec{\omega}) \cos \vec{\omega}\vec{r}$
	$f(\vec{\rho}) = f_1(\vec{\rho} - \vec{r}) - f_1(\vec{\rho} + \vec{r})$	$F(j\vec{\omega}) = 2F_1(j\vec{\omega}) \sin \vec{\omega}\vec{r}$
	$f(\vec{\rho}) = 2f_1(\vec{\rho}) - f_1(\vec{\rho} - \vec{r}) - f_1(\vec{\rho} + \vec{r})$	$F(j\vec{\omega}) = 4F_1(j\vec{\omega}) \sin^2 \frac{\vec{\omega}\vec{r}}{2}$
Транспозиция преобразования	$f(\vec{\rho}) = e^{j\vec{\Omega}\vec{\rho}} f_1(\vec{\rho})$	$F(j\vec{\omega}) = F_1[j(\vec{\omega} + \vec{\Omega})]$
Преобразования произведений сигналов на тригонометрические функции	$f(\vec{\rho}) = f_1(\vec{\rho}) \cos \vec{\Omega}\vec{\rho}$	$F(j\vec{\omega}) = \frac{1}{2}\{F_1[j(\vec{\omega} - \vec{\Omega})] + F_1[j(\vec{\omega} + \vec{\Omega})]\}$
	$f(\vec{\rho}) = f_1(\vec{\rho}) \sin \vec{\Omega}\vec{\rho}$	$F(j\vec{\omega}) = -\frac{1}{2}\{F_1[j(\vec{\omega} + \vec{\Omega})] - F_1[j(\vec{\omega} - \vec{\Omega})]\}$
	$f(\vec{\rho}) = f_1(\vec{\rho}) \sin^2 \frac{\vec{\Omega}\vec{\rho}}{2}$	$F(j\vec{\omega}) = \frac{1}{4}\{2F_1(j\vec{\omega}) - F_1[j(\vec{\omega} + \vec{\Omega})] - F_1[j(\vec{\omega} - \vec{\Omega})]\}$

Наименование свойств	Соотношения между сигналами	Соотношения между преобразованиями
Преобразование свертки	$f(\vec{\rho})=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(\vec{r})f_2(\vec{\rho}-\vec{r})\,d\vec{r}$	$F(j\vec{\omega})=F_1(j\vec{\omega})F_2(j\vec{\omega})$
Преобразование произведения	$f(\vec{\rho})=f_1(\vec{\rho})f_2(\vec{\rho})$	$F(j\vec{\omega})=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_1(j\vec{\Omega})\times F_2[j(\vec{\omega}-\vec{\Omega})]\,d\vec{\Omega}$

Многомерное преобразование Фурье обладает рядом свойств, аналогичных свойствам одномерного преобразования [Л. 45]. Эти свойства приводятся в табл. 2.

В дополнение к приведенным свойствам многомерное преобразование Фурье обладает рядом специфических свойств, которые проявляются при преобразовании векторного аргумента сигнала $\vec{\rho}$.

Рассмотрим некоторое линейное преобразование аргумента $\vec{\rho}$:

$$\vec{r}=M\vec{\rho},$$

где $M=\begin{Vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{Vmatrix}$ — матрица преобразования;

тогда преобразование Фурье от сигнала может быть представлено в следующем виде:

$$F_M(j\vec{\omega})=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(M\vec{\rho})\,e^{-j\vec{\omega}\vec{\rho}}\,d\vec{\rho}. \qquad (8)$$

Произведем в интеграле замену переменных

$$\vec{\rho}=M^{-1}\vec{r},$$

где $M^{-1}=\begin{Vmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \frac{A_{31}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \frac{A_{32}}{\Delta} \\ \frac{A_{13}}{\Delta} & \frac{A_{23}}{\Delta} & \frac{A_{33}}{\Delta} \end{Vmatrix}$ — обратная матрица;

$\Delta=\det M$ — определитель матрицы M;

A_{ik} — алгебраические дополнения элементов $\bar{a}_{ik}$ матрицы M,

$$F_M(j\vec{\omega}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{r})\, e^{-j\vec{\omega}M^{-1}\vec{r}}\, d(M^{-1}\vec{r}).$$

В показателе степени стоит скалярное произведение двух векторов. Оно может быть представлено в виде произведения трех матриц

$$\| \omega_\alpha, \omega_\beta, \omega_t \| \cdot \left\| \begin{matrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \frac{A_{31}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \frac{A_{32}}{\Delta} \\ \frac{A_{13}}{\Delta} & \frac{A_{23}}{\Delta} & \frac{A_{33}}{\Delta} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} \alpha \\ \beta \\ t \end{matrix} \right\| =$$

$$= \omega_\alpha\left(\frac{A_{11}}{\Delta}\alpha + \frac{A_{21}}{\Delta}\beta + \frac{A_{31}}{\Delta}t\right) + \omega_\beta\left(\frac{A_{12}}{\Delta}\alpha + \frac{A_{22}}{\Delta}\beta + \frac{A_{32}}{\Delta}t\right) +$$
$$+ \omega_t\left(\frac{A_{13}}{\Delta}\alpha + \frac{A_{23}}{\Delta}\beta + \frac{A_{33}}{\Delta}t\right).$$

Рассмотрим теперь другое скалярное произведение векторов:

$$\| \alpha, \beta, t \| \cdot \left\| \begin{matrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \frac{A_{31}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \frac{A_{32}}{\Delta} \\ \frac{A_{13}}{\Delta} & \frac{A_{23}}{\Delta} & \frac{A_{33}}{\Delta} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} \omega_\alpha \\ \omega_\beta \\ \omega_t \end{matrix} \right\| =$$

$$= \alpha\left(\frac{A_{11}}{\Delta}\omega_\alpha + \frac{A_{21}}{\Delta}\omega_\beta + \frac{A_{31}}{\Delta}\omega_t\right) +$$
$$+ \beta\left(\frac{A_{12}}{\Delta}\omega_\alpha + \frac{A_{22}}{\Delta}\omega_\beta + \frac{A_{32}}{\Delta}\omega_t\right) +$$
$$+ t\left(\frac{A_{13}}{\Delta}\omega_\alpha + \frac{A_{23}}{\Delta}\omega_\beta + \frac{A_{33}}{\Delta}\omega_t\right).$$

Сравнивая эти два скалярные произведения векторов, можно заключить, что для симметричных линейных преобразований

$$\vec{\omega}M^{-1}\vec{r} = \vec{r}M^{-1}\vec{\omega}, \tag{9}$$

поэтому

$$F_M(j\vec{\omega}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{r})\, e^{-j\vec{r}M^{-1}\vec{\omega}}\, d(M^{-1}\vec{r}).$$

Из полученного выражения следует:

$$F_M(j\vec{\omega}) = |\det M^{-1}|\, F(jM^{-1}\vec{\omega}). \qquad (10)$$

Таким образом, при линейном преобразовании векторного аргумента сигнала аргумент преобразования Фурье преобразуется с помощью обратной матрицы.

Рассмотрим несколько частных случаев линейного преобразования аргумента сигнала.

Растяжение сигнала

При растяжении сигнала в пространстве матрица преобразования является диагональной:

$$M = \begin{Vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{Vmatrix}.$$

Обратная матрица равна:

$$M^{-1} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_{33}} \end{Vmatrix},$$

а ее определитель

$$\det M^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22}a_{33}}.$$

Подставляя эти значения в формулу (10), получаем:

$$F_M(j\vec{\omega}) = \frac{1}{a_{11}a_{22}a_{33}} F\left[j \begin{Vmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_{33}} \end{Vmatrix} \vec{\omega} \right]. \qquad (11)$$

Из полученной зависимости следует, что при растяжении сигнала в пространстве его спектр сужается.

Вращение сигнала

Матрицы поворота сигнала вокруг трех осей координат (рис. 12) имеют следующую форму:

$$M_{\gamma} = \left\| \begin{matrix} \cos\gamma & 0 & -\sin\gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\gamma & 0 & \cos\gamma \end{matrix} \right\|;$$

$$M_{\vartheta} = \left\| \begin{matrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\|;$$

$$M_{\varepsilon} = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon & \sin\varepsilon \\ 0 & -\sin\varepsilon & \cos\varepsilon \end{matrix} \right\|.$$

Рассмотрим сначала поворот сигнала в плоскости $\alpha 0 \beta$ на угол γ. Сравнивая матрицы поворота с обратной матрицей, можно заклю-

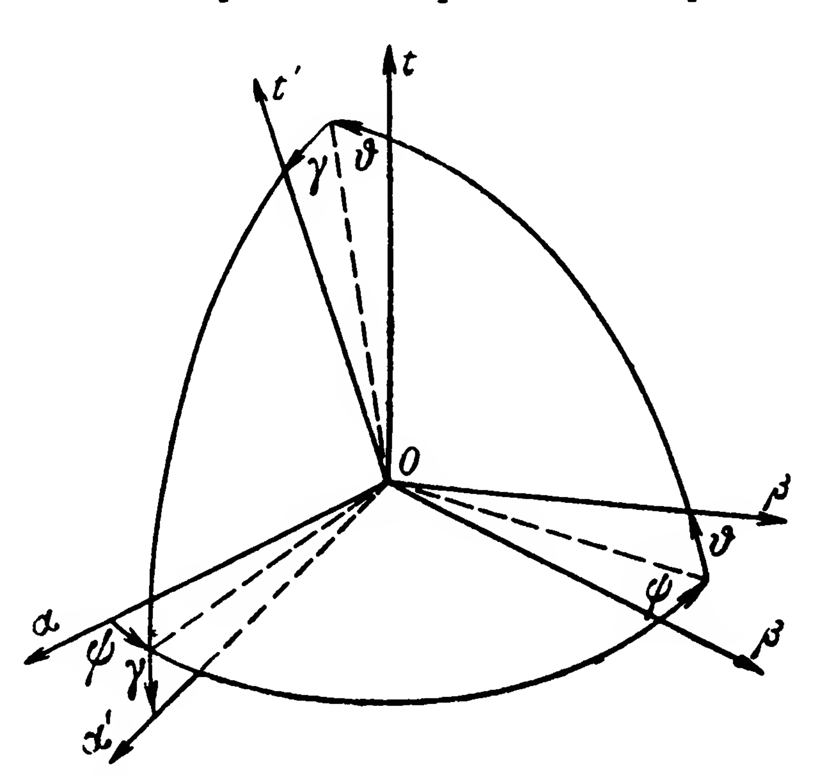


Рис. 12. Схема поворота сигнала.

чить, что

$$M_{\gamma}^{-1} = M_{\gamma}.$$

Определитель обратной матрицы равен:

$$\det M_{\gamma}^{-1} = 1,$$

поэтому спектр повернутого сигнала

$$F_{M_{\gamma}}(j\vec{\omega}) = F(jM_{\gamma}\vec{\omega}). \qquad (12)$$

Отсюда следует, что поворот сигнала на некоторый угол γ в плоскости $\alpha 0 \beta$ приводит к повороту его преобразования Фурье на тот же угол в плоскости $\omega_{\alpha} 0 \omega_{\beta}$. Если сигнал обладает вращательной

симметрией в плоскости $\alpha 0 \beta$, то эта симметрия переносится и в плоскость его преобразования Фурье.

Рассмотрим теперь общий случай поворота сигнала вокруг трех осей. Матрица поворота равняется произведению

$$M_{\gamma\vartheta\varepsilon} = M_\gamma M_\vartheta M_\varepsilon,$$

следовательно,

$$M_{\gamma\vartheta\varepsilon} = \begin{Vmatrix} \cos\gamma\cos\vartheta & \sin\vartheta & -\sin\gamma\cos\vartheta \\ \sin\gamma\sin\varepsilon - \\ -\cos\gamma\sin\vartheta\cos\varepsilon & \cos\vartheta\cos\varepsilon & \cos\gamma\sin\varepsilon + \\ +\sin\gamma\sin\vartheta\cos\varepsilon \\ \sin\gamma\cos\varepsilon + \\ +\cos\gamma\sin\vartheta\sin\varepsilon & -\cos\vartheta\sin\varepsilon & \cos\gamma\cos\varepsilon - \\ -\sin\gamma\sin\vartheta\sin\varepsilon \end{Vmatrix}.$$

Обратная матрица имеет следующий вид:

$$M_{\gamma\vartheta\varepsilon}^{-1} = \begin{Vmatrix} \cos\gamma\cos\vartheta & -\sin\vartheta & \sin\gamma\cos\vartheta \\ -\sin\gamma\sin\varepsilon + \\ +\cos\gamma\sin\vartheta\cos\varepsilon & \cos\vartheta\cos\varepsilon & -\cos\gamma\sin\varepsilon - \\ -\sin\gamma\sin\vartheta\cos\varepsilon \\ -\sin\gamma\cos\varepsilon - \\ -\cos\gamma\sin\vartheta\sin\varepsilon & \cos\vartheta\sin\varepsilon & \cos\gamma\cos\varepsilon - \\ -\sin\gamma\sin\vartheta\sin\varepsilon \end{Vmatrix}.$$

Сравнивая приведенные матрицы, видим, что

$$M_{\gamma\vartheta\varepsilon} \neq M_{\gamma\vartheta\varepsilon}^{-1}.$$

Из этого соотношения следует, что поворот сигнала вокруг трех осей координат не приводит к эквивалентному повороту его преобразования Фурье.

Зеркально-симметричное преобразование сигнала

Рассмотрим такое преобразование сигнала, при котором векторный аргумент сигнала $\vec{\rho}$ испытывает отражение от некоторой плоскости Q (рис. 13), фиксируемой нормалью к ней $\vec{p}$. Направление отраженного вектора будет:

$$\vec{r} = \vec{\rho} - 2(\vec{p}\vec{\rho})\,\vec{p}. \quad (13)$$

В матричной форме оно может быть записано следующим образом:

$$\vec{r} = M_p \vec{\rho},$$

где $M_p = \begin{Vmatrix} 1-2p_\alpha^2 & -2p_\alpha p_\beta & -2p_\alpha p_t \\ -2p_\alpha p_\beta & 1-2p_\beta^2 & -2p_\beta p_t \\ -2p_\alpha p_t & -2p_\beta p_t & 1-2p_t^2 \end{Vmatrix}$ — матрица отражения:

p_α, p_β, p_t — составляющие вектора $\vec{p}$ по осям координат.

Матрица отражения является несобственно ортогональной симметричной. Определитель ее равен: $\det M_p = -1$.

Обратная матрица может быть представлена следующим образом:

$$M_p^{-1} = \left\| \begin{matrix} 1-2p_\beta^2-2p_t^2 & -2p_\alpha p_\beta & 2p_\alpha p_t \\ -2p_\alpha p_\beta & 1-2p_\alpha^2-2p_t^2 & -2p_\beta p_t \\ 2p_\alpha p_t & -2p_\beta p_t & 1-2p_\alpha^2-2p_\beta^2 \end{matrix} \right\| .$$

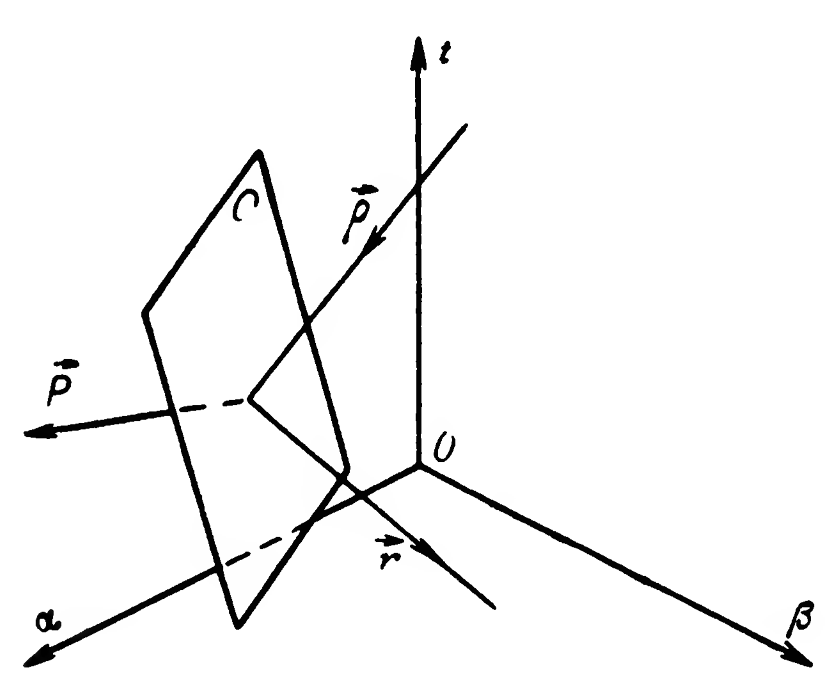


Рис. 13. Схема зеркального преобразования сигнала.

Если учесть, что вектор $\vec{p}$ является единичным и

$$p_\alpha^2 + p_\beta^2 + p_t^2 = 1,$$

то обратная матрица будет:

$$M_p^{-1} = \left\| \begin{matrix} 1-2p_\alpha^2 & -2p_\alpha p_\beta & 2p_\alpha pt \\ -2p_\alpha p_\beta & 1-2p_\beta^2 & -2p_\beta p_t \\ 2p_\alpha p_t & -2p_\beta p_t & 1-2p_t^2 \end{matrix} \right\| .$$

Преобразование Фурье от зеркально-преобразованного сигнала имеет следующий вид:

$$F_{M_p}(j\vec{\omega}) = F(jM_p^{-1}\vec{\omega}). \qquad (14)$$

Рассмотрим частный случай зеркально-симметричного преобразования сигнала относительно некоторой линии, лежащей в плоскости $\alpha 0 \beta$. Матрица преобразования вектора $\vec{\rho}$ будет:

$$M_p = \left\| \begin{matrix} 1-2p_\alpha^2 & -2p_\alpha p_\beta & 0 \\ -2p_\alpha p_\beta & 1-2p_\beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| .$$

Обратная матрица имеет ту же форму, т. е.

$$M_p^{-1} = M_p.$$

Таким образом, зеркально симметричное преобразование сигнала в плоскости двух независимых переменных приводит к такому же преобразованию в плоскости его преобразования Фурье.

Если сигнал, являющийся функцией двух переменных, обладает зеркальной симметрией, то эта симметрия переносится в плоскость преобразования Фурье.

Спектр сигнала является комплексной функцией переменных ω_α, ω_β и ω_t, поэтому его можно представить в виде суммы двух функций

$$F(j\omega_\alpha, j\omega_\beta, j\omega_t) = A(\omega_\alpha, \omega_\beta, \omega_t) + jB(\omega_\alpha, \omega_\beta, \omega_t), \tag{15}$$

где $A(\omega_\alpha, \omega_\beta, \mu_t)$ — действительная, а $B(\omega_\alpha, \omega_\beta, \omega_t)$ — мнимая части спектра сигнала.

Спектр может быть записан также в виде произведения

$$F(j\omega_\alpha, j\omega_\beta, j\omega_t) = F(\omega_\alpha, \omega_\beta, \omega_t)\, e^{-j\psi(\omega_\alpha, \omega_\beta, \omega_t)}. \tag{16}$$

Функции $F(\omega_\alpha, \omega_\beta, \omega_t)$ и $\psi(\omega_\alpha, \omega_\beta, \omega_t)$ называются соответственно амплитудной и фазовой характеристиками спектра сигнала.

Между введенными характеристиками имеются следующие соотношения:

$$F(\omega_\alpha, \omega_\beta, \omega_t) = \sqrt{[A(\omega_\alpha, \omega_\beta, \omega_t)]^2 + [B(\omega_\alpha, \omega_\beta, \omega_t)]^2}; \tag{17}$$

$$\psi(\omega_\alpha, \omega_\beta, \omega t) = \operatorname{arc\,tg} \frac{B(\omega_\alpha, \omega_\beta, \omega_t)}{A(\omega_\alpha, \omega_\beta, \omega_t)}. \tag{18}$$

В ряде случаев целесообразно пользоваться частными спектральными представлениями световых сигналов:

$$F(j\omega_\alpha, \beta, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha, \beta, t) e^{-j\omega_\alpha \alpha} d\alpha; \tag{19}$$

$$F(j\omega_\alpha, j\omega_\beta, t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha, \beta, t)\, e^{-j(\omega_\alpha \alpha + \omega_\beta \beta)} d\alpha\, d\beta, \tag{20}$$

которые получаются при неполном преобразовании Фурье. Частные спектральные представления сигналов могут быть подвергнуты неполному обратному преобразованию Фурье.

8. Представление сигналов интегралами Ханкеля

Рассмотрим преобразование Фурье сигнала, являющегося функцией двух переменных:

$$F(j\omega_\alpha, j\omega_\beta) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha, \beta)\, e^{-j(\omega_\alpha \alpha + \omega_\beta \beta)} d\alpha\, d\beta.$$

Введем полярные координаты

$$\alpha = \rho \cos \chi;$$
$$\beta = \rho \sin \chi,$$

тогда пространственные частоты ω_α и ω_β тоже будут составляющими вектора пространственной частоты

$$\omega_\alpha = \omega \cos \varphi;$$
$$\omega_\beta = \omega \sin \varphi.$$

Произведем подстановку новых переменных в интеграл Фурье

$$F(j\omega, \varphi) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(\rho, \chi)\, e^{-j\rho\omega(\cos \chi \cos \varphi + \sin \chi \sin \varphi)} \rho d\rho\, d\chi. \qquad (21)$$

Введем обозначение

$$f(\rho, \chi) = j^{-n} g(\rho)\, e^{jn\chi},$$

тогда формула (21) может быть представлена в следующем виде:

$$F(j\omega, \varphi) = j^{-n} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} g(\rho)\, e^{-j\rho\omega \cos(\chi - \varphi) + jn\chi} \rho d\rho\, d\chi.$$

Если теперь обозначить

$$\chi - \varphi = \theta,$$
$$F(j\omega, \varphi) = F(\omega)\, e^{jn\varphi};$$

то получим:

$$F(\omega) = j^{-n} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} g(\rho)\, e^{-j\rho\omega \cos \theta + jn\theta} \rho d\rho d\theta.$$

Интегральное представление функции Бесселя имеет вид:

$$\mathrm{I}_n(\rho\omega) = \frac{j^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-j\rho\omega \cos \theta + jn\theta} d\theta, \qquad (22)$$

следовательно,

$$F(\omega) = 2\pi \int_0^\infty \rho \mathrm{I}_n(\rho\omega)\, g(\rho)\, d\rho. \qquad (23)$$

Полученный интеграл называется преобразованием Ханкеля сигнала $g(\rho)$. Для преобразования Ханкеля существует формула обращения. Обратное преобразование Ханкеля определяется интегралом

$$g(\rho) = \int_0^\infty \omega \mathrm{I}_n(\rho\omega)\, F(\omega)\, d\omega \qquad (24)$$

или

$$f(\rho, \chi) = j^n e^{jn\chi} \int_0^\infty \omega I_n(\rho\omega) F(\omega)\, d\omega. \qquad (25)$$

Если сигнал обладает вращательной симметрией, то $n=0$ и

$$g(\rho) = f(\rho),$$

а в интегралах Ханкеля необходимо подставить функцию Бесселя нулевого порядка

$$F(\omega) = 2\pi \int_0^\infty \rho I_0(\rho\omega) f(\rho)\, d\rho; \qquad (26)$$

$$f(\rho) = \int_0^\infty \omega I_0(\rho\omega) F(\omega)\, d\omega. \qquad (27)$$

Отсюда следует, что применение преобразования Ханкеля наиболее эффективно для сигналов, обладающих вращательной симметрией, так как при этом двухмерная задача сводится к одномерной.

Преобразование Ханкеля обладает следующим свойством:

$$2\pi \int_0^\infty \rho I_0(\rho\omega) f(a\rho)\, d\rho = \frac{1}{a^2} F\left(\frac{\omega}{a}\right). \qquad (28)$$

Из этого свойства непосредственно вытекает показанная ранее связь между сигналом и его преобразованием Фурье при растяжении сигнала в пространстве.

9. Многомерные спектры типовых сигналов

Точечный сигнал

Точечный световой сигнал может быть представлен в виде пространственной дельта-функции:

$$\delta(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) = \begin{cases} \infty \text{ при } \alpha = \alpha_0 \text{ и } \beta = \beta_0; \\ 0 \text{ при } \alpha \neq \alpha_0 \text{ или } \beta \neq \beta_0. \end{cases} \qquad (29)$$

Свойства пространственной дельта-функции аналогичны таковым для одномерной дельта-функции:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0)\, d\alpha d\beta = 1;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha, \beta)\, \delta(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0)\, d\alpha d\beta = f(\alpha_0, \beta_0),$$

где $f(\alpha, \beta)$ — непрерывная и ограниченная функция.

Найдём спектр точечного сигнала

$$F_{\delta}(j\omega_{\alpha}, j\omega_{\beta}) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\alpha-\alpha_0, \beta-\beta_0)\, e^{-j(\omega_{\alpha}\alpha+\omega_{\beta}\beta)}\, d\alpha\, d\beta.$$

Учитывая одно из свойств дельта-функции, получим:

$$F_{\delta}(j\omega_{\alpha}, j\omega_{\beta}) = e^{-j(\omega_{\alpha}\alpha_0+\omega_{\beta}\beta_0)}. \qquad (30)$$

Амплитудная и фазовая характеристики спектра соответственно равняются:

$$F_{\delta}(\omega_{\alpha}, \omega_{\beta}) = 1;$$
$$\psi(\omega_{\alpha}, \omega_{\beta}) = \omega_{\alpha}\alpha_0 + \omega_{\beta}\beta_0.$$

Если точечный сигнал совпадает с началом координат, то фазовая характеристика равняется нулю.

Сигнал-линия

Сигнал, представляющий собой светящуюся линию, параллельную оси β, может быть представлен следующим образом:

$$\delta(\alpha-\alpha_0) = \begin{cases} \infty \text{ при } \alpha = \alpha_0; \\ 0 \text{ при } \alpha \neq \alpha_0. \end{cases} \qquad (31)$$

Спектр его определяется интегралом

$$F_{\delta}(j\omega_{\alpha}, j\omega_{\beta}) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\alpha-\alpha_0)\, e^{-j(\omega_{\alpha}\alpha+\omega_{\beta}\beta)}\, d\alpha\, d\beta,$$

откуда

$$F_{\delta}(j\omega_{\alpha}, j\omega_{\beta}) = e^{-j\omega_{\alpha}\alpha_0}\delta(\omega_{\beta}). \qquad (32)$$

Амплитудная и фазовая характеристики спектра равны:

$$F_{\delta}(\omega_{\alpha}, \omega_{\beta}) = \delta(\omega_{\beta});$$
$$\psi(\omega_{\alpha}, \omega_{\beta}) = \omega_{\alpha}\alpha_0.$$

Амплитудная характеристика представляет собой линию, совпадающую с осью ω_{α}.

Найдем теперь спектр сигнала-линии, повернутого на угол γ в плоскости $\alpha 0 \beta$. Спектр его определяется выражением

$$F_{\delta_{\gamma}}(j\vec{\omega}) = F_{\delta}(jM_{\gamma}\vec{\omega}), \qquad (33)$$

где

$$M_{\gamma} = \begin{Vmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{Vmatrix}$$ — матрица вращения.

Составляющие вектора частоты после поворота равны:

$$\omega'_\alpha = \omega_\alpha \cos\gamma - \omega_\beta \sin\gamma;$$
$$\omega'_\beta = \omega_\alpha \sin\gamma + \omega_\beta \cos\gamma.$$

Следовательно, спектр сигнала будет:

$$F_{\delta_\gamma}(j\omega_\alpha,\ j\omega_\beta) = e^{-j\alpha_0(\omega_\alpha\cos\gamma - \omega_\beta\sin\gamma)}\,\delta(\omega_\alpha\sin\gamma + \omega_\beta\cos\gamma). \quad (34)$$

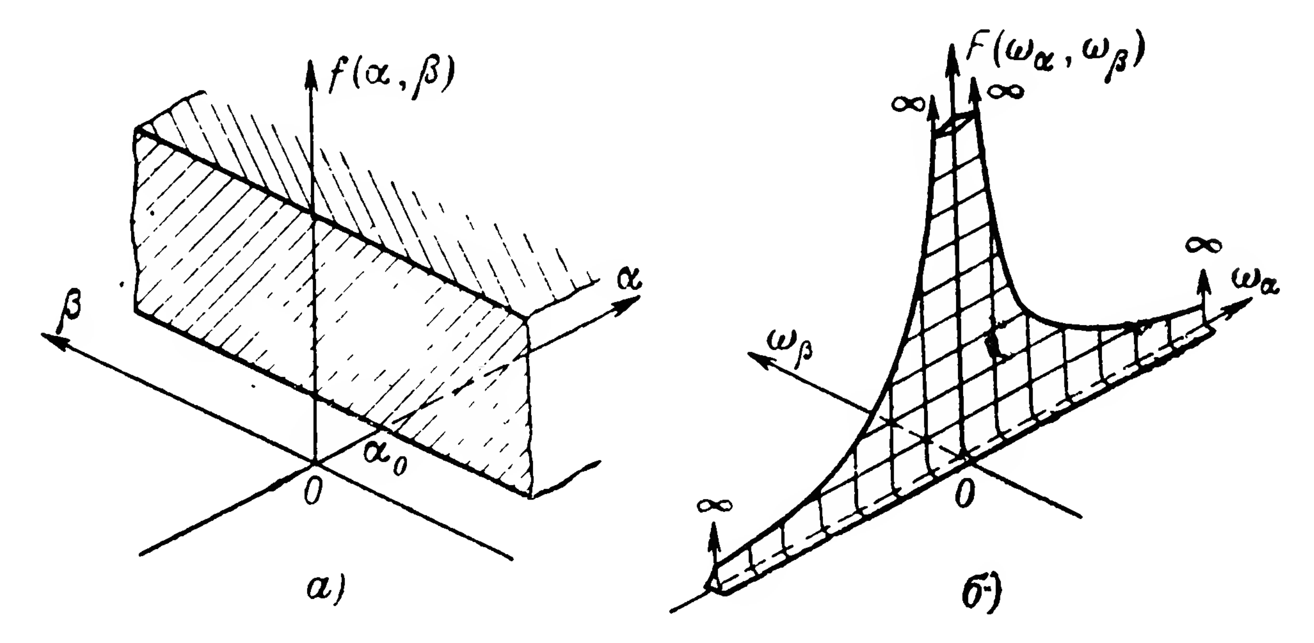


Рис. 14. Единичный сигнал.
***а* — форма сигнала; *б* — амплитудная характеристика спектра.**

Амплитудная характеристика

$$F_{\delta_\gamma}(\omega_\alpha,\ \omega_\beta) = \delta(\omega_\alpha\sin\gamma + \omega_\beta\cos\gamma)$$

оказывается повернутой при этом в плоскости $\omega_\alpha 0 \omega_\beta$ также на угол γ.

Единичный сигнал

Единичный сигнал (рис. 14,*а*) представляет собой освещенную полуплоскость. Он может быть записан следующим образом:

$$\sigma(\alpha - \alpha_0) = \begin{cases} 0 & \text{при } \alpha < \alpha_0; \\ \frac{1}{2} & \text{при } \alpha = \alpha_0; \\ 1 & \text{при } \alpha > \alpha_0. \end{cases} \quad (35)$$

Можно установить следующую связь единичного сигнала с дельта-функцией:

$$\int_{-\infty}^{\alpha} \delta(\alpha)\,d\alpha = \sigma(\alpha);$$

$$\delta(\alpha) = \frac{d}{d\alpha}\sigma(\alpha).$$

Для нахождения спектра необходимо вычислить интеграл

$$F_\sigma(j\omega_\alpha, j\omega_\beta) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \sigma\ (\alpha)\, e^{-j(\omega_\alpha \alpha + \omega_\beta \beta)} d\alpha\, d\beta.$$

Подставляя сюда значение единичного сигнала и разделяя интегралы, получаем:

$$F_\sigma(j\omega_\alpha, j\omega_\beta) = \int_0^\infty e^{-j\omega_\alpha \alpha} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega_\beta \beta} d\beta,$$

откуда

$$F_\sigma(j\omega_\alpha, j\omega_\beta) = \frac{1}{j\omega_\alpha}\,\delta(\omega_\beta). \tag{36}$$

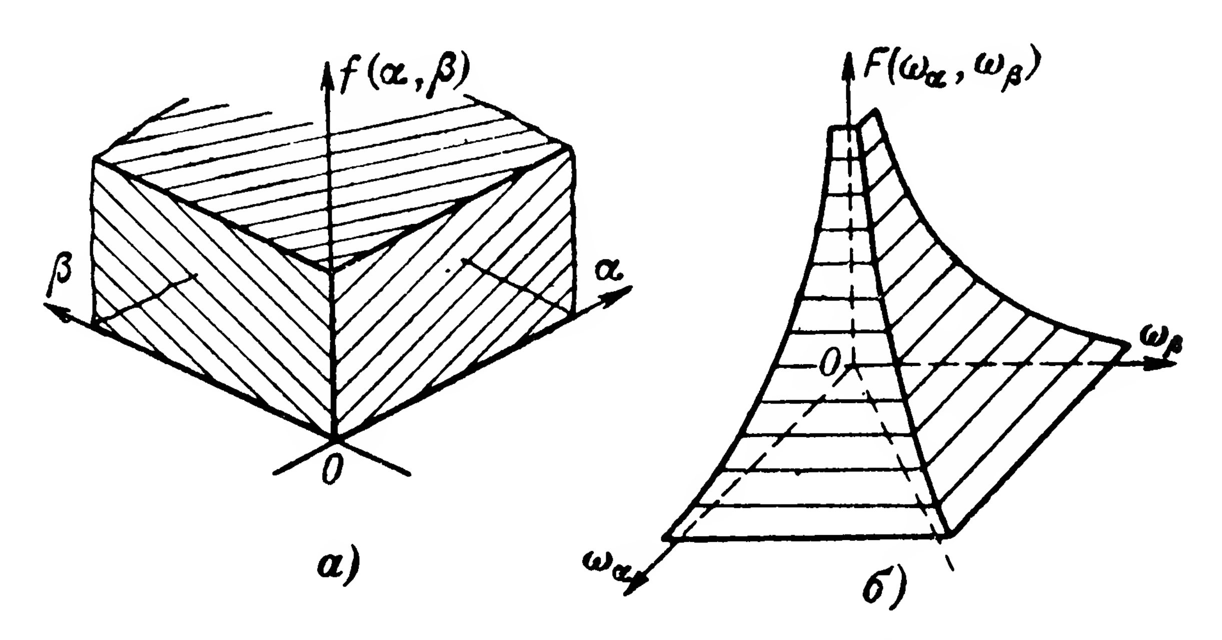


Рис. 15. Единичный сигнал в четверти плоскости.
а — форма сигнала; *б* — амплитудная характеристика спектра.

Если учесть сдвиг сигнала по оси α, то его спектр будет:

$$F_\sigma(j\omega_\alpha, j\omega_\beta) = \frac{1}{j\omega_\alpha}\,\delta(\omega_\beta) e^{-j\omega_\alpha \alpha_0}.$$

Амплитудная характеристика спектра

$$F_\sigma(\omega_\alpha, \omega_\beta) = \frac{1}{\omega_\alpha}\,\delta(\omega_\beta)$$

изображена на рис. 14,*б*. Она совпадает с осью ω_α, ее значения при всех значениях аргумента ω_α бесконечны, но относительные их величины неодинаковы.

Единичный сигнал может распространяться в четверти плоскости (рис. 15,*а*). Его аналитическое выражение имеет следующий вид:

$$f(\alpha, \beta) = \begin{cases} 1 \text{ при } \alpha > 0 \text{ и } \beta > 0 \\ 0 \text{ при прочих значениях } \alpha \text{ и } \beta. \end{cases} \tag{37}$$

Спектр сигнала определяется интегралом

$$F(j\omega_\alpha, \ j\omega_\beta) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-j(\omega_\alpha \alpha + \omega_\beta \beta)} d\alpha\, d\beta,$$

откуда после интегрирования имеем:

$$F(j\omega_\alpha, \ j\omega_\beta) = \frac{1}{\omega_\alpha \omega_\beta}. \tag{38}$$

Амплитудная характеристика спектра (рис. 15,*б*) с увеличением частоты убывает.

10. Характеристики случайных многомерных сигналов

Случайный световой сигнал $x(\alpha, \ \beta, \ t)$, являющийся функцией нескольких неслучайных аргументов, называют случайным световым полем.

Реализации случайного сигнала можно считать функциями векторного аргумента $x(\vec{\rho})$. Вероятность того, что в точке пространства, определенной вектором $\vec{\rho}_1$, случайный сигнал находится в интервале от x_1 до $x_1 + dx_1$, определяется функцией плотности вероятности первого порядка $w_1(x_1, \ \vec{\rho}_1)$.

Функция плотности вероятности второго порядка $w_2(x_1, \ \vec{\rho}_1; \ x_2, \ \vec{\rho}_2)$ определяет вероятность того, что в точке $\vec{\rho}_1$ случайный сигнал находится в интервале от x_1 до $x_1 + dx_1$, а в точке $\vec{\rho}_2$ в интервале от x_2 до $x_2 + dx_2$. Связь между этими функциями определяется интегралом

$$w_1(x_1, \ \bar{\rho}_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} w_2(x_1, \ \vec{\rho}_1; \ x_2, \ \vec{\rho}_2)\, dx_2. \tag{39}$$

Случайные световые сигналы часто бывают однородными (стационарными во всем пространстве). Функции плотности вероятности таких сигналов не зависят от начала отсчета

$$w_1(x_1, \ \vec{\rho}_1) = w_1(x_1, \ \vec{\rho}_1 + \vec{r}_0); \ w_2(x_1, \ \vec{\rho}_1; \ x_2, \ \vec{\rho}_2) =$$
$$= w_2(x_1, \ \vec{\rho}_1 + \vec{r}_0; \ x_2, \ \vec{\rho}_2 + \vec{r}_0).$$

Из первого равенства следует, что функция плотности вероятности первого порядка вообще не зависит от координаты $\vec{\rho}$:

$$w_1(x, \ \vec{\rho}_1) = w_1(x_1).$$

Из второго же равенства видно, что функция плотности вероятности второго порядка неизменна:

$$w_2(x_1, \ \vec{\rho}_1; \ x_2, \ \vec{\rho}_2) = w_2(x_1, \ x_2, \ \vec{r}),$$

если разность векторов $\vec{r} = \vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_1$ остается постоянной.

Математическое ожидание многомерного случайного сигнала

$$\tilde{x}(\vec{\rho}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x w_1(x, \vec{\rho})\, dx \tag{40}$$

является средним по множеству его случайных реализаций. Среднее значение случайного сигнала в пространстве равно:

$$\bar{x} = \lim_{\substack{\alpha_1 \to \infty \\ \beta_1 \to \infty}} \frac{1}{4\alpha_1\beta_1} \int_{-\alpha_1}^{+\alpha_1} \int_{-\beta_1}^{+\beta_1} x(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta. \tag{41}$$

Оно не зависит от координат, но различно для разных реализаций сигнала, принадлежащих одному множеству.

Среднее по множеству стационарного сигнала равно:

$$\tilde{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x w_1(x)\, dx.$$

Так как оно не зависит от координаты, то среднее по множеству с вероятностью, равной единице, равно среднему в пространстве $\tilde{x} = \bar{x}$. Это равенство определяет свойство эргодичности случайных процессов. Оно справедливо не только для математического ожидания, но и для моментов высших порядков:

$$\widetilde{x^n} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n w_1(x)\, dx;$$

$$\overline{x^n} = \lim_{\substack{\alpha_1 \to \infty \\ \beta_1 \to \infty}} \frac{1}{4\alpha_1\beta_1} \int_{-\alpha_1}^{+\alpha_1} \int_{-\beta_1}^{+\beta_1} [x(\alpha, \beta)]^n\, d\alpha\, d\beta,$$

которые также равны друг другу $\widetilde{x^n} = \overline{x^n}$.

Автокорреляционная функция случайного многомерного сигнала определяется интегралом

$$R_x(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 w_2(x_1, x_2, \vec{r})\, dx_1 dx_2. \tag{42}$$

Используя свойство эргодичности случайного сигнала, можно представить автокорреляционную функцию и в другой форме:

$$R_x(\mu, \nu) = \lim_{\substack{\alpha_1 \to \infty \\ \beta_1 \to \infty}} \frac{1}{4\alpha_1\beta_1} \int_{-\alpha_1}^{+\alpha_1} \int_{-\beta_1}^{+\beta_1} x(\alpha, \beta)\, x(\alpha + \mu, \beta + \nu)\, d\alpha\, d\beta, \tag{43}$$

где μ и ν — составляющие вектора $\vec{r}$ по осям координат.

Случайные световые сигналы могут обладать свойством изотропности: вращение осей координат не приводит к изменению их функции плотности вероятности. Автокорреляционная функция изо-

тропного сигнала зависит только от расстояния r между двумя точками поля и не зависит от его направления:

$$R_x(r) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 w_2(x_1, x_2, r)\, dx_1\, dx_2.$$

Спектральную плотность случайного многомерного сигнала можно получить путем применения прямого преобразования Фурье к автокорреляционной функции:

$$S_x(\vec{\omega}) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R_x(\vec{r}) e^{-j\vec{\omega}\vec{r}} d\vec{r}. \qquad (44)$$

Используя обратное преобразование Фурье, можно по спектральной плотности сигнала найти его автокорреляционную функцию

$$R_x(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} S_x(\vec{\omega}) e^{j\vec{\omega}\vec{r}} d\vec{\omega}. \qquad (45)$$

Полагая в этой формуле $\vec{r} = 0$, найдем выражение для дисперсии случайного сигнала

$$R_x(0) = \overline{x^2} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} S_x(\vec{\omega})\, d\vec{\omega}.$$

Рассмотрим свойства автокорреляционных функций и спектральных плотностей случайных многомерных стационарных сигналов. Некоторые из этих свойств, представленных в табл. 3, аналогичны свойствам характеристик случайных одномерных стационарных сигналов [Л. 45].

Рассмотрим теперь изменения характеристик многомерного стационарного сигнала при линейном преобразовании аргумента $\vec{\rho}$. Положим

$$\vec{\rho}' = M\vec{\rho},$$

где $M = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}$ — матрица преобразования,

тогда автокорреляционная функция будет равна:

$$R_{xM}(\vec{r}) = \lim_{B\to\infty} \frac{1}{B} \int\limits_B x(M\vec{\rho})\, x[M(\vec{\rho} \quad \vec{r})]\, d\vec{\rho}.$$

Подставляя сюда значение нового аргумента $\vec{\rho}'$, получаем:

$$R_{xM}(\vec{r}) = \lim_{B\to\infty} \frac{1}{B} \int\limits_B x(\vec{\rho}')\, x(\vec{\rho}' + M\vec{r})\, d(M^{-1}\vec{\rho}'),$$

где M^{-1} — обратная матрица.

Таблица 3

Наименования свойств	Соотношения между сигналами	Соотношения между автокорреляционными функциями	Соотношения между спектральными плотностями
Четность	—	$R_x(\vec{r}) = R_x(-\vec{r})$	$S_x(\vec{\omega}) = S_x(-\vec{\omega})$
Сумма независимых сигналов	$x(\vec{\rho}) = x_1(\vec{\rho}) + x_2(\vec{\rho})$	$R_x(\vec{r}) = R_{x1}(\vec{r}) + R_{x2}(\vec{r})$	$S_x(\vec{\omega}) = S_{x1}(\vec{\omega}) + S_{x2}(\vec{\omega})$
Произведение независимых сигналов	$x(\vec{\rho}) = x_1(\vec{\rho})\, x_2(\vec{\rho})$	$R_x(\vec{r}) = R_{x1}(\vec{r})\, R_{x2}(\vec{r})$	$S_x(\vec{\omega}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \times$ $\times \int\limits_{-\infty}^{+\infty} S_{x1}(\vec{\Omega})\, S_{x2}(\vec{\omega} - \vec{\Omega})\, d\vec{\Omega}$
Смещение сигнала в пространстве	$y = x(\vec{\rho} - \vec{r}_0)$	$R_y(\vec{r}) = R_x(\vec{r})$	$S_y(\vec{\omega}) = S_x(\vec{\omega})$
Производная от сигнала	$x = x^{(n)}(\vec{\rho})$	$R_y(\vec{r}) = (-1)^n R_x^{(2n)}(\vec{r})$	$S_y(\vec{\omega}) = \omega^{-2n} S_x(\vec{\omega})$.

Отсюда следует, что

$$R_{xM}(\vec{r}) = |\det M^{-1}|\, R_x(M\vec{r}). \qquad (46)$$

Таким образом, при линейном преобразовании аргумента сигнала аргумент автокорреляционной функции подвергается такому же преобразованию.

Спектральная плотность многомерного случайного сигнала после линейного преобразования аргумента будет:

$$S_{xM}(\vec{\omega}) = |\det M^{-1}| \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(M\vec{r})\, e^{-j\vec{\omega}\vec{r}}\, d\vec{r}.$$

Полагая, что $\vec{r}' = M\vec{r}$, имеем:

$$S_{xM}(\vec{\omega}) = |\det M^{-1}| \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\vec{r}')\, e^{-j\vec{\omega}M^{-1}\vec{r}'} d(M^{-1}\vec{r}').$$

На основании формул (8) и (10) получим:

$$S_{xM}(\vec{\omega}) = |\det M^{-1}|^2 S_x(M^{-1}\vec{\omega}). \qquad (47)$$

Следовательно, при линейном преобразовании векторного аргумента сигнала аргумент его спектральной плотности преобразуется с помощью обратной матрицы.

Если случайный сигнал является функцией двух переменных, то его спектральная плотность определяется интегралом

$$S_x(\omega_\mu, \omega_\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\mu, \nu)\, e^{-j(\omega_\mu \mu + \omega_\nu \nu)} d\mu\, d\nu.$$

Введем полярные координаты

$$\mu = r\cos\chi;\ \nu = r\sin\chi;\ \omega_\mu = \omega\cos\varphi;\ \omega_\nu = \omega\sin\varphi,$$

тогда спектральная плотность будет равной

$$S_x(\omega, \varphi) = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} R_x(r, \chi)\, e^{jr\omega(\cos\chi\cos\varphi + \sin\chi\sin\varphi)}\, r\, dr\, d\chi.$$

Если произвести преобразования этого интеграла, аналогичные проведенным в § 8, то получим спектральную плотность изотропного сигнала в следующем виде:

$$S_x(\omega) = 2\pi \int_0^{\infty} r I_0(r\omega)\, R_x(r)\, dr. \qquad (48)$$

Для нахождения автокорреляционной функции изотропного сигнала необходимо воспользоваться обратным преобразованием Ханкеля

$$R_x(r) = \int_0^{\infty} \omega I_0(r\omega)\, S_x(\omega)\, d\omega. \qquad (49)$$

Полученное представление спектральных плотностей стационарных изотропных сигналов оказалось возможным благодаря тому, что их автокорреляционные функции (а следовательно, и спектральные плотности) обладают симметрией вращения.

11. Типовые случайные многомерные сигналы

Рассмотрим случайный сигнал, возникающий в результате наложения детерминированных элементарных световых сигналов

$$x = x(\alpha - \alpha_i,\ \beta - \beta_k),$$

появляющихся в случайных точках пространства. Возникновения элементарных сигналов можно рассматривать как независимые события.

Если обозначить n_{ik} — число элементарных сигналов, возникающих в элементарной области пространства, то случайный сигнал будет равен сумме

$$y(\alpha, \beta) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} n_{ik} x(\alpha - \alpha_i,\ \beta - \beta_k).$$

Введем теперь обозначение

$$n_{ik} = \bar{n}_1 \Delta\alpha_i \Delta\beta_k,$$

где $\bar{n}_1$ — математическое ожидание числа элементарных сигналов на единице области, тогда математическое ожидание случайного сигнала будет равно:

$$\overline{y(\alpha, \beta)} = \lim_{\substack{\Delta\alpha_i \to \infty \\ \Delta\beta_k \to \infty}} \bar{n}_1 \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(\alpha - \alpha_i,\ \beta - \beta_k)\, \Delta\alpha_i \Delta\beta_k. \tag{50}$$

Если сигнал является стационарным, то в пределе получим:

$$\overline{y(\alpha, \beta)} = \bar{n}_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta. \tag{51}$$

Автокорреляционная функция сигнала определяется интегралом

$$R_y(\mu, \nu) = \bar{n}_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha, \beta)\, x(\alpha + \mu,\ \beta + \nu)\, d\alpha\, d\beta. \tag{52}$$

Когда угловые размеры элементарных сигналов конечны и соответственно равны α_1 и β_1, автокорреляционная функция при $|\mu| \geqslant \alpha_1$ и $|\nu| \geqslant \beta_1$ равна нулю, поэтому

$$R_y(\mu, \nu) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\alpha_1 - |\mu|} \int_0^{\beta_1 - |\nu|} x(\alpha, \beta)\, x(\alpha + |\mu|,\ \beta + |\nu|)\, d\alpha\, d\beta; \\ \quad \text{при } |\mu| < \alpha_1 \text{ и } |\nu| < \beta_1; \\ 0 \text{ при } |\mu| \geqslant \alpha_1 \text{ или } |\nu| \geqslant \beta_1. \end{cases} \tag{53}$$

Для иллюстрации нахождения характеристик случайных сигналов по приведенным формулам рассмотрим несколько примеров.

Пространственный белый шум

Если элементарные световые сигналы представляют собой пространственную дельта-функцию $x(\alpha, \beta) = c\delta(\alpha, \beta)$,

то математическое ожидание случайного сигнала будет:

$$\overline{y(\alpha, \beta)} = \bar{n}_1 c \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta.$$

Учитывая одно из свойств дельта-функции, имеем:

$$\overline{y(\alpha, \beta)} = \bar{n}_1 c. \qquad (54)$$

Автокорреляционная функция случайного сигнала равна:

$$R_y(\mu, \nu) = \bar{n}_1 c \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\alpha, \beta)\, \delta(\alpha + \mu, \beta + \nu)\, d\alpha\, d\beta,$$

откуда получим:

$$R_y(\mu, \nu) = \bar{n}_1 c\delta(\mu, \nu). \qquad (55)$$

Полагая в этом выражении $\mu = \nu = 0$, найдем дисперсию сигнала

$$\overline{y^2(\alpha, \beta)} = \infty.$$

Спектральная плотность пространственного белого шума определяется интегралом

$$S_y(\omega_\mu, \omega_\nu) = \bar{n}_1 c \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\mu, \nu)\, e^{-j(\omega_\mu \mu + \omega_\nu \nu)} d\mu\, d\nu.$$

Интегрируя это выражение, получим:

$$S_y(\omega_\mu, \omega_\nu) = \bar{n}_1 c. \qquad (56)$$

Следовательно, спектральная плотность пространственного белого шума является величиной постоянной.

Наложение сигналов прямоугольной формы

Если элементарные световые сигналы являются прямоугольными, равными и одинаково ориентированными относительно осей координат, то их аналитическое выражение имеет следующий вид:

$$x(\alpha, \beta) = \begin{cases} 1 \text{ при } 0 < \alpha < \alpha_1 \text{ и } 0 < \beta < \beta_1; \\ 0 \text{ при } \alpha < 0 \text{ и } \alpha > \alpha_1 \text{ или } \beta < 0 \text{ и } \beta > \beta_1. \end{cases}$$

Подставляя значение элементарного сигнала в формулы (51) и (53), получим математическое ожидание и автокорреляционную функцию случайного сигнала:

$$\overline{y(\alpha, \beta)} = \bar{n}_1 \alpha_1 \beta_1; \qquad (57)$$

$$R_y(\mu, \nu) = \begin{cases} n_1(\alpha_1 - |\mu|)(\beta_1 - |\nu|) \text{ при } |\mu| < \alpha_1, |\nu| < \beta_1; \\ 0 \text{ при } |\mu| \geqslant \alpha_1 \text{ или } |\nu| \geqslant \beta_1. \end{cases} \qquad (58)$$

Автокорреляционная функция сигнала (рис. 16,*а*), имеет пирамидальную форму.

Найдем спектральную плотность рассматриваемого случайного сигнала:

$$S_y(\omega_\mu, \omega_\nu) = \bar{n}_1 \left[\int_{-\alpha_1}^{0} (\alpha_1 + \mu) e^{-j\omega_\mu \mu} d\mu + \int_{0}^{\alpha_1} (\alpha_1 - \mu) e^{-j\omega_\mu \mu} d\mu \right] \times$$

$$\times \left[\int_{-\beta_1}^{0} (\beta_1 + \nu) e^{-j\omega_\nu \nu} d\nu + \int_{0}^{\beta_1} (\beta_1 - \nu) e^{-j\omega_\nu \nu} d\nu \right].$$

Рис. 16. Характеристики случайного сигнала.
а — автокорреляционная функция; *б* — спектральная плотность.

Вычисляя эти интегралы, получаем:

$$S_y(\omega_\mu, \omega_\nu) = 4\bar{n}_1 \frac{(1 - \cos \omega_\mu \alpha_1)(1 - \cos \omega_\nu \beta_1)}{\omega_\mu^2 \omega_\nu^2}. \tag{59}$$

Эта зависимость изображена на рис. 16,*б*.

Найдем теперь характеристики случайного сигнала $z(\alpha, \beta)$, представляющего собой освещенное поле, затененное случайно расположенными равными прямоугольниками. Связь между характеристиками этого и ранее рассмотренного светового сигнала определяется равенством

$$z(\alpha, \beta) = 1 - y(\alpha, \beta).$$

Математическое ожидание сигнала равно:

$$\overline{z(\alpha, \beta)} = \lim_{\substack{\alpha_1 \to \infty \\ \beta_1 \to \infty}} \frac{1}{4\alpha_1\beta_1} \int_{-\alpha_1}^{\alpha_1} \int_{-\beta_1}^{\beta_1} [1 - y(\alpha, \beta)]\, d\alpha\, d\beta,$$

откуда

$$\overline{z(\alpha, \beta)} = 1 - \overline{y(\alpha, \beta)};$$

$$\overline{z(\alpha, \beta)} = 1 - \bar{n}_1\alpha_1\beta_1. \tag{60}$$

Найдем дисперсию случайного сигнала:

$$z_1^2(\alpha, \beta) = \overline{[z(\alpha, \beta) - \overline{z(\alpha, \beta)}]^2}.$$

Случайный сигнал $z(\alpha, \beta)$ принимает только два значения 0 и 1, поэтому

$$\overline{z^2(\alpha, \beta)} = \overline{z(\alpha, \beta)}$$

и

$$\overline{z_1^2(\alpha, \beta)} = \overline{z(\alpha, \beta)}\,[1 - \overline{z(\alpha, \beta)}].$$

Подставляя сюда значение математического ожидания, получаем:

$$\overline{z_1^2(\alpha, \beta)} = \bar{n}_1\alpha_1\beta_1\,(1 - \bar{n}_1\alpha_1\beta_1). \tag{61}$$

Автокорреляционная функция сигнала определяется интегралом

$$R_z(\mu, \nu) = \lim_{\substack{\alpha_1\to\infty \\ \beta_1\to\infty}} \frac{1}{4\alpha_1\beta_1} \int_{-\alpha_1}^{\alpha_1}\int_{-\beta_1}^{\beta_1} [1 - y(\alpha, \beta)]\,[1 - y(\alpha+\mu, \beta+\nu)]\,d\alpha d\beta.$$

Преобразуя это выражение, имеем:

$$R_z(\mu, \nu) = 1 - \overline{2y(\alpha, \beta)} + R_y(\mu, \nu). \tag{62}$$

Автокорреляционная функция сигнала $z(\alpha, \beta)$ отличается от функции, изображенной на рис. 16,*а*, только постоянной величиной.

Спектральная плотность сигнала

$$S_z(\omega_\mu, \omega_\nu) = (1 - 2\bar{n}_1\alpha_1\beta_1)\,\delta(\omega_\mu, \omega_\nu) + + 4\bar{n}_1 \frac{(1 - \cos\omega_\mu\alpha_1)(1 - \cos\omega_\nu\beta_1)}{\omega_\mu^2\,\omega_\nu^2} \tag{63}$$

характеризуется наличием пика на нулевой частоте.

Сигнал с экспоненциальной автокорреляционной функцией

В случае, когда элементарные прямоугольные сигналы неравны друг другу, автокорреляционная функция случайного сигнала может быть аппроксимирована зависимостью (рис. 17,*а*)

$$R_z(\mu, \nu) = D_z e^{-(\alpha_\mu|\mu| + \alpha_\nu|\nu|)}. \tag{64}$$

Спектральная плотность сигнала равна:

$$S_z(\omega_\mu, \omega_\nu) = D_z \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega_\mu\mu - \alpha_\mu|\mu|}\,d\mu \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega_\nu\nu - \alpha_\nu|\nu|}\,d\nu.$$

Разбивая каждый из этих интегралов на два, получаем:

$$S_z(\omega_\mu, \omega_\nu) = D_z \left[\int_0^\infty e^{-(\alpha_\mu + j\omega_\mu)\mu} d\mu + \int_{-\infty}^0 e^{-(\alpha_\mu - j\omega_\mu)\mu} d\mu \right] \times$$

$$\times \left[\int_0^\infty e^{-(\alpha_\nu + j\omega_\nu)\nu} d\nu + \int_{-\infty}^0 e^{-(\alpha_\nu - j\omega_\nu)\nu} d\nu \right],$$

откуда после интегрирования имеем:

$$S_z(\omega_\mu, \omega_\nu) = D_z \left(\frac{1}{\alpha_\mu + j\omega_\mu} + \frac{1}{\alpha_\mu - j\omega_\mu} \right) \left(\frac{1}{\alpha_\nu + j\omega_\nu} + \frac{1}{\alpha_\nu - j\omega_\nu} \right).$$

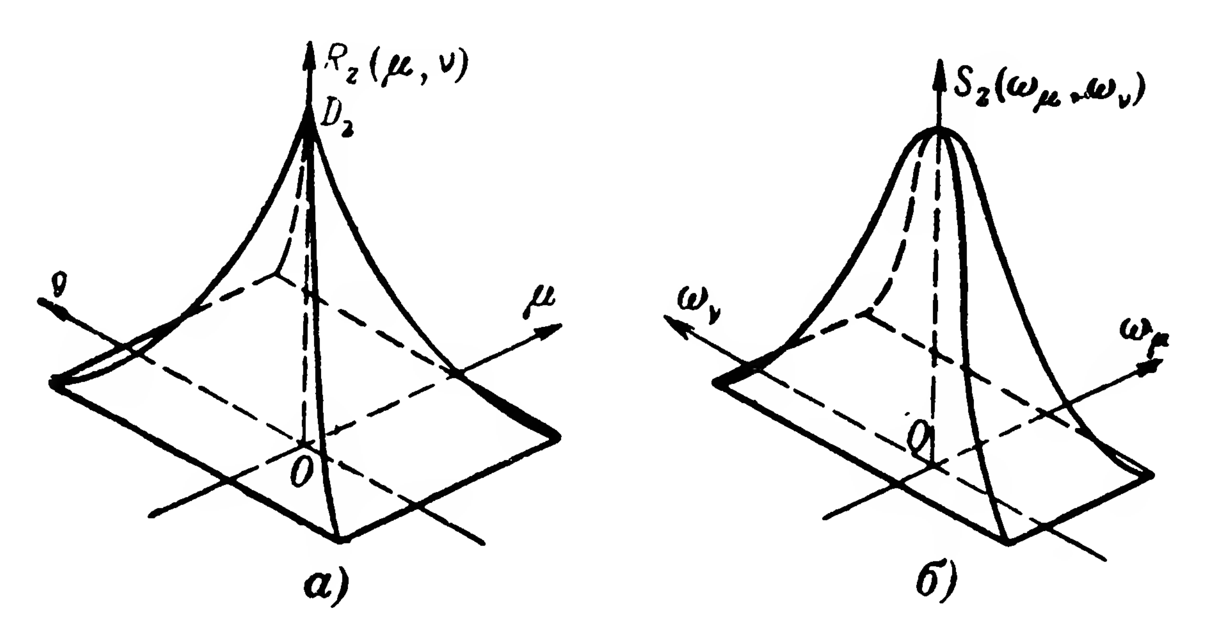


Рис. 17. Характеристики случайного сигнала.
а — автокорреляционная функция; *б* — спектральная плотность.

После приведения к общему знаменателю каждого из сомножителей получим окончательное выражение для спектральной плотности:

$$S_z(\omega_\mu, \omega_\nu) = \frac{4D_z\alpha_\mu\alpha_\nu}{(\omega_\mu^2 + \alpha_\mu^2)(\omega_\nu^2 + \alpha_\nu^2)}. \tag{65}$$

Эта зависимость изображена на рис. 17,*б*.

Характеристики изотропного сигнала, представляющего собой освещенное поле, экранированное случайно расположенными площадками круглой формы, найдены О'Нейлом [Л. 30]. Математическое ожидание случайного сигнала равно:

$$\overline{x(\alpha, \beta)} = e^{-2\pi n' \int_0^\infty [1 - w_1(\rho_i)] \rho d\rho}, \tag{66}$$

где $w_1(\rho_i)$ — закон распределения радиусов элементарных площадок;

n' — количество площадок на единицу площади освещенного поля.

Автокорреляционная функция случайного сигнала зависит только от одной переменной

$$R_x(r) = \lim_{S\to\infty} \frac{1}{S} \iint\limits_S x(\alpha, \beta)\, x(\alpha - r, \beta)\, d\alpha\, d\beta.$$

Она равна:

$$R_x(r) = e^{-4n' \left\{ \pi \int\limits_0^\infty [1 - w_1(\rho)]\, \rho\, d\rho - \int\limits_{\frac{r}{2}}^\infty \arccos \frac{r}{2\rho} [1 - w_1(\rho)]\, \rho\, d\rho \right\}} \qquad (67)$$

Рассмотрим в качестве примера частный случай, когда радиусы всех экранирующих кружков равны.

Наложение круглых сигналов равных радиусов

Закон распределения радиусов экранирующих кружков определяется следующей зависимостью:

$$w_1(\rho) = \begin{cases} 0 \text{ при } \rho < R_1; \\ 1 \text{ при } \rho \geqslant R_1. \end{cases}$$

Подставляя это значение в формулу (66), найдем математическое ожидание

$$\overline{x(\alpha, \beta)} = e^{-\pi R_1^2 n'}. \qquad (68)$$

На основании рассуждений, приведенных при выводе формулы (61), найдем дисперсию сигнала

$$\overline{x^2(\alpha, \beta)} = e^{-\pi R_1^2 n'} (1 - e^{-\pi R_1^2 n'}). \qquad (69)$$

Выражение для автокорреляционной функции находится из формулы (67):

$$R_x(r) = [\overline{x(\alpha, \beta)}]^2\, e^{\pi R_1^2 f\left(\frac{r}{2R_1}\right) n'}, \qquad (70)$$

где

$$f\left(\frac{r}{2R_1}\right) = \frac{2}{\pi} \left[\arccos \frac{r}{2R_1} - \frac{r}{2R_1} \sqrt{1 - \left(\frac{r}{2R_1}\right)^2} \right].$$

Определим теперь характеристики случайного сигнала $y(\alpha, \beta)$, полученного путем наложения светящихся кружков. Этот сигнал может быть записан в следующем виде:

$$y(\alpha, \beta) = 1 - x(\alpha, \beta).$$

На основании формул (60) и (62) найдем математическое ожидание и автокорреляционную функцию сигнала:

$$\overline{y(\alpha, \beta)} = 1 - e^{-\pi R_1^2 n'}; \qquad (71)$$

$$R_y(r) = 1 - 2e^{-\pi R_1^2 n'} + e^{-2\pi R_1^2 n' + \pi R_1^2 f\left(\frac{r}{2R_1}\right) n'} \qquad (72)$$

Автокорреляционные функции сигналов $y(\alpha, \beta)$ и $x(\alpha, \beta)$ различаются только наличием постоянной составляющей.

Изотропный сигнал с экспоненциальной автокорреляционной функцией

В том случае, когда элементарные круговые световые сигналы, из которых слагается случайный сигнал, имеют различные радиусы, автокорреляционная функция его с достаточной для практики точностью может быть аппроксимирована выражением

$$R_Z(r) = D_Z e^{-\alpha r}. \quad (73)$$

Для нахождения спектральной плотности сигнала необходимо воспользоваться преобразованием Ханкеля:

$$S_Z(\omega) = 2\pi D_Z \int_0^\infty I_0(\omega r) e^{-\alpha r} r\, dr.$$

Вычисляя этот интеграл, получаем:

$$S_Z(\omega) = \frac{4D_Z \sqrt{\pi}\, \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{(\alpha^2 + \omega^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (74)$$

Спектральная плотность такого сигнала обладает симметрией вращения.

Глава третья

МНОГОМЕРНЫЕ ФИЛЬТРЫ СВЕТОВЫХ СИГНАЛОВ

12. Типы фильтров световых сигналов

Преобразование световых сигналов в следящих системах производится с помощью разнообразных оптических элементов, являющихся фильтрами сигналов. Фильтры световых сигналов делятся на две группы: одномерные и многомерные.

Одномерные фильтры преобразуют электромагнитный спектр излучений. Действие их основано на избирательном поглощении излучений различного спектрального состава. Основными характеристиками одномерных фильтров являются спектральный $\tau(\lambda)$ и интегральный τ_Σ коэффициенты пропускания излучения. Связь между ними определяется формулой

$$\tau_\Sigma = \frac{\int_0^\infty \Phi(\lambda)\tau(\lambda)\, d\lambda}{\int_0^\infty \Phi(\lambda)\, d\lambda}, \quad (75)$$

где $\Phi(\lambda)$ — электромагнитный спектр светового сигнала.

Многомерные фильтры служат для изменения пространственно-временно́й формы сигналов. Многомерными фильтрами являются оптические и механические элементы и устройства, используемые для фокусирования, изменения направления, ограничения, модуляции, разделения и сложения световых лучей.

На рис. 18 изображены две типовые схемы оптических систем фотоэлектрических устройств. Простейшая из них состоит из объектива и установленного в его фокальной плоскости анализатора. В качестве анализаторов используются неподвижные диафрагмы, ограничивающие световой поток, и модуляторы, преобразующие

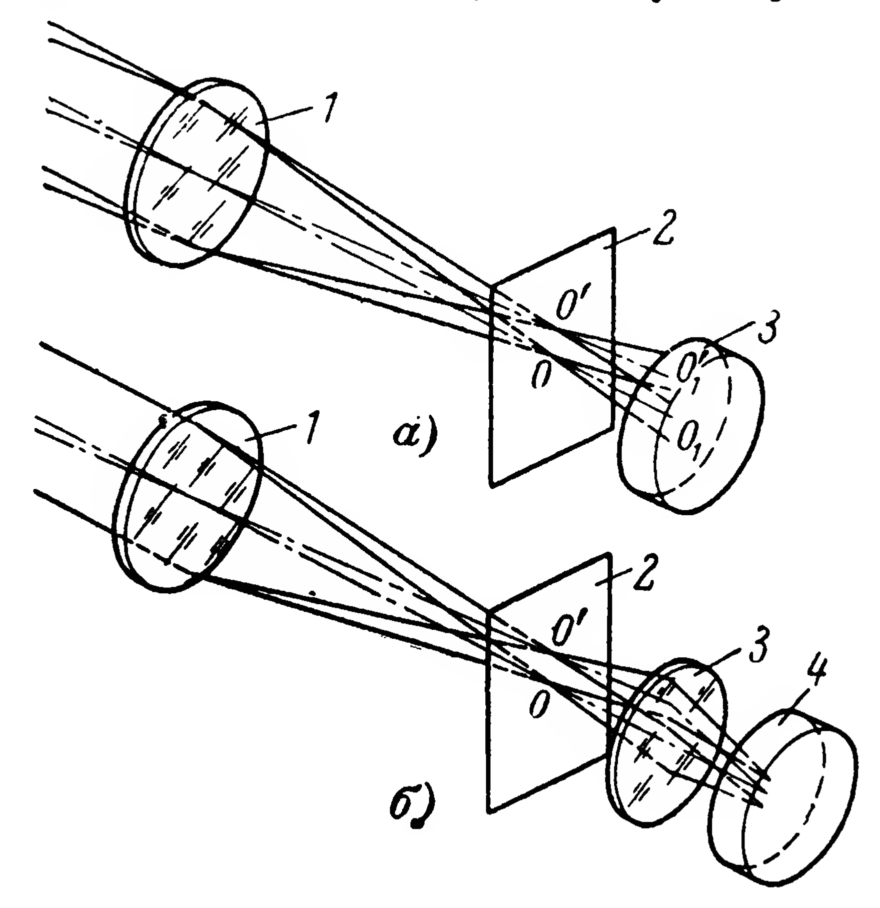


Рис. 18. Схемы оптических систем.

а — без конденсора: *1* — объектив; *2* — анализатор; *3* — приемник излучения; *б* — с конденсором: *1* — объектив; *2* — анализатор; *3* — конденсор; *4* — приемник излучения.

постоянный световой сигнал в переменный. Во второй схеме имеется дополнительная линза-конденсор, благодаря которой световой поток равномерно распределяется по поверхности приемника излучения.

Объектив служит для фокусирования светового потока. Вследствие явления дифракции и аберраций оптической системы световой поток от точечного источника не фокусируется объективом в точку.

Распределение освещенности в дифракционном пятне, создаваемом при построении изображения точечного источника света идеальным объективом, определяется следующим выражением

$$E(\rho)=\left[\frac{2\mathrm{I}_1\left(\frac{2\pi}{\lambda}A\rho\right)}{\frac{2\pi}{\lambda}A\rho}\right]^2, \qquad (76)$$

где A — отношение диаметра объектива к его фокусному расстоянию.

Дифракционное пятно состоит из яркого центрального кружка, окруженного кольцами, освещенности которых быстро уменьшаются.

Качество изображения точечного источника света, создаваемого реальным объективом, определяется его аберрациями. Различается

Таблица 4

Виды аберраций	Схемы аберрационных пятен	Размеры пятен
Идеальный объектив		—
Сферическая аберрация		$r_1=k_1A^3$
Кома		$r_1=k_2A^2\alpha$
Астигматизм		$2a-2b=k_3A\alpha^2$
Кривизна поля		$r_1=\frac{1}{4}k_4A\alpha^2$
Дисторсия		$\Delta l=k_5\alpha^3$
Хроматизм положения		$r_1=k_6A$
Хроматизм увеличения		$r_1=k_1\alpha$

несколько видов аберраций, характеристики которых приведены в табл. 4.

В таблице приняты следующие обозначения:

r_1 — радиус пятна рассеяния света;
a и b — полуоси эллипса рассеяния света;
Δl — смещение изображения точки от положения ее, построенного идеальным объективом;
α — угол между визирной осью и направлением на точечный источник света.

В формулах введены коэффициенты k_i, зависящие от конструктивных элементов объектива.

Ограничение светового потока диафрагмой имеет целью уменьшение аберраций оптической системы и изменение пространственной формы сигнала. Диафрагмы могут иметь различную форму (рис. 19).

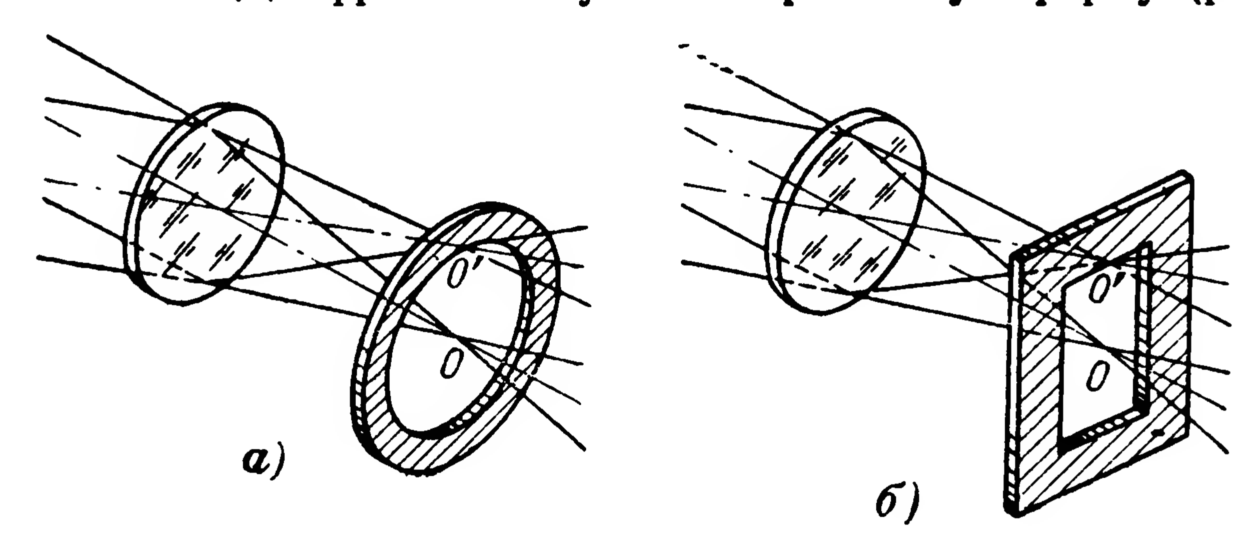


Рис. 19. Схемы диафрагм.
а — кольцевая; *б* — прямоугольная.

Центры диафрагм обычно совмещены с оптической осью, а плоскости их перпендикулярны оси.

Модуляторы преобразуют не только пространственную, но и временную форму светового сигнала. Модуляция светового сигнала может быть непрерывной и импульсной.

Непрерывная модуляция бывает трех видов: амплитудная, частотная и фазовая. На рис. 7 изображена схема амплитудного, а на рис. 8 — частотного модулятора.

Применяются также модуляторы двухчастотные: на несущей и огибающей частотах. На рис. 20 изображена схема двухчастотного амплитудного модулятора. Достоинством двухчастотной модуляции является возможность повышения помехозащищенности фотоэлектрических устройств от случайных световых помех.

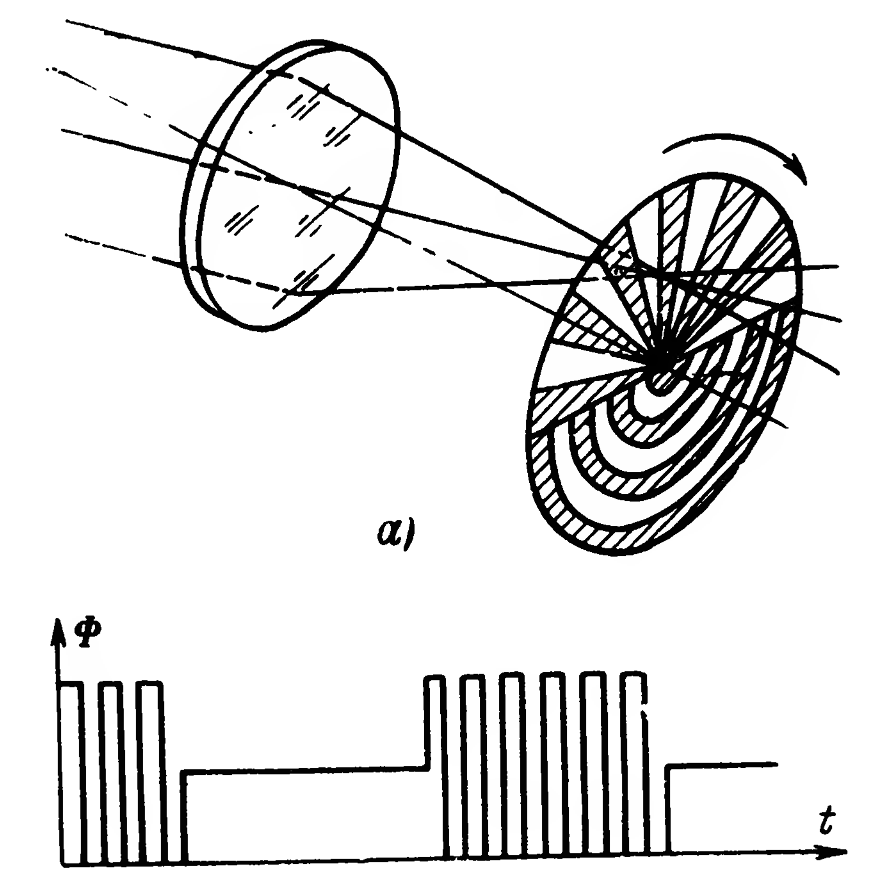


Рис. 20. Амплитудный модулятор.
а — схема модулятора; *б* — эпюра светового сигнала.

Импульсная модуляция световых сигналов также может быть нескольких видов: амплитудно - импульсная, время-импульсная, частотно-импульсная, фазово-импульсная, широтно-импульсная.

Возможна и комбинированная модуляция. На рис. 21 изображена схема широтно-импульсного модулятора. Период повторения импульсов постоянен, а длительность их меняется в течение периода по синусоидальному закону.

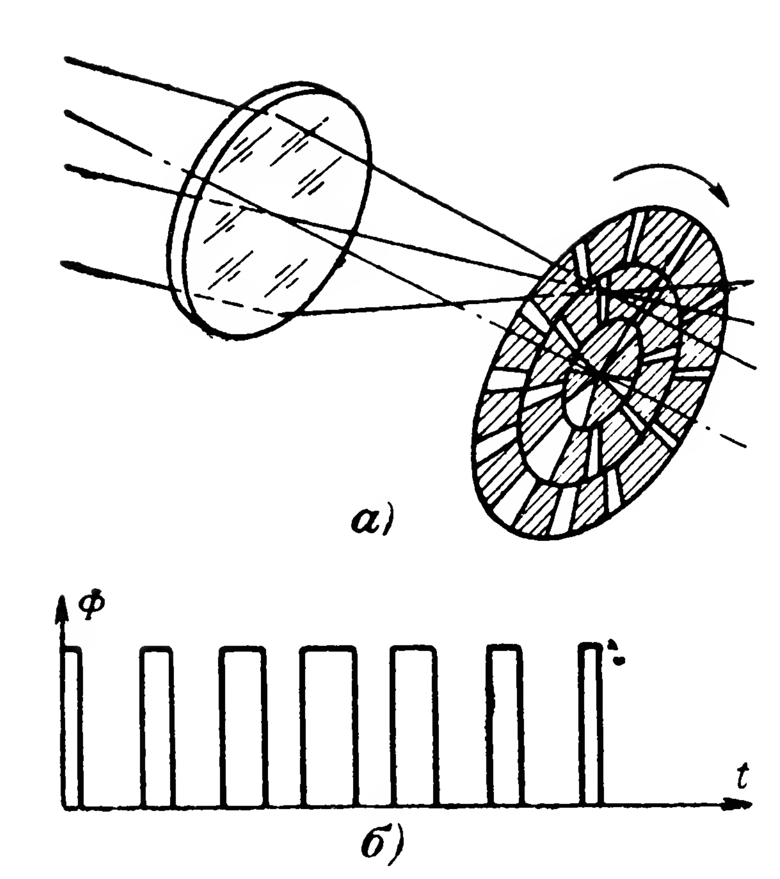


Рис. 21. Широтно-импульсный модулятор.

а — схема модулятора; б — эпюра светового сигнала.

Принцип действия разделительных и суммирующих устройств иллюстрируется рис. 22. Разделение и сложение световых сигналов осуществляется с помощью полупрозрачных зеркал или зеркальных призм. В суммирующем устройстве с полупрозрачным зеркалом выходной световой сигнал равен:

$$\Phi = \frac{1}{2}(\Phi_1 + \Phi_2).$$

Отсюда следует, что в них происходит большая потеря светового сигнала. Более экономичными являются суммирующие устройства с зеркальными призмами.

13. Характеристики фильтров

Весовая функция

Весовой функцией $w(\alpha, \beta)$ многомерного фильтра называется его реакция на входной сигнал, представляющий собой пространственную дельта-функцию $\delta(\alpha, \beta)$. Полная мощность сигнала на выходе фильтра равна интегралу

$$\Phi = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} w(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta.$$

Таким образом, весовая функция характеризует собой пространственное распределение мощности светового сигнала после прохождения многомерного фильтра.

В зависимости от вида весовой функции фильтры делятся на стационарные и нестационарные. Весовая функция стационарного фильтра имеет постоянную форму независимо от смещения ее по осям координат. Весовая функция нестационарного фильтра зависит от смещения ее по осям координат μ и ν:

$$w = w(\alpha, \mu, \beta, \nu).$$

Объектив, обладающий сферической аберрацией и хроматизмом положения, является стационарным (см. табл. 4). При наличии же любых других аберраций объектив является нестационарным фильтром.

Отличие весовых функций многомерных фильтров от одномерных состоит в том, что при совпадении входного возмущения $\delta(\alpha, \beta)$ с началом координат весовая функция $w(\alpha, \beta)$ может быть симметричной относительно начала координат, тогда как для одномерного фильтра весовая функция $w(t)$ при $t<0$ равняется нулю.

Частотные характеристики

Частотной характеристикой фильтра называют прямое преобразование Фурье от его весовой функции:

$$W(j\omega_\alpha, j\omega_\beta, j\omega t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} w(\alpha, \beta, t)\, e^{-j(\omega_\alpha \alpha+\omega_\beta \beta+\omega_t t)}\, d\alpha\, d\beta\, dt. \tag{77}$$

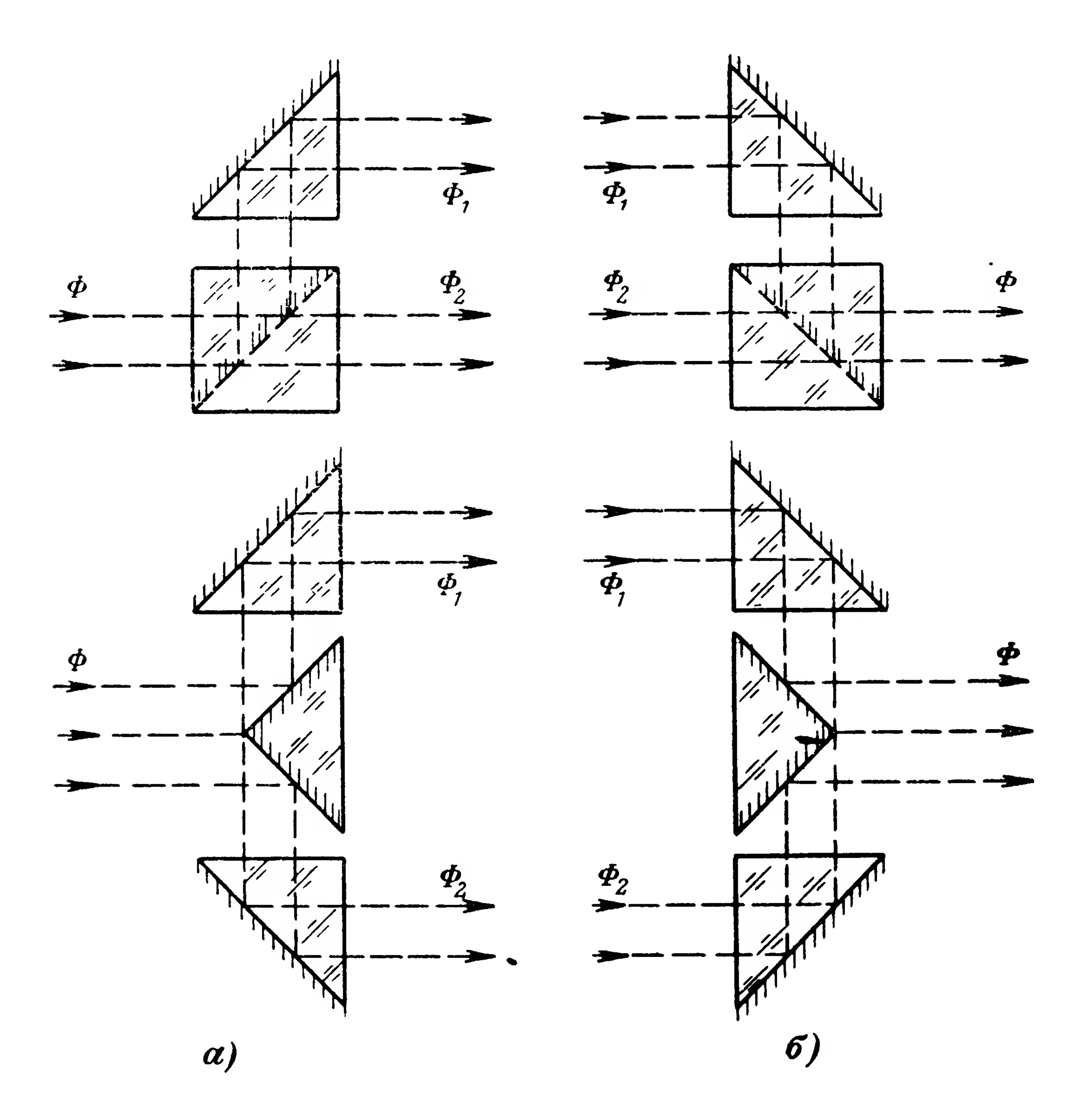


Рис. 22. Схемы суммирующих устройств.
а — разделительные устройства; *б* — суммирующие устройства.

В гл. 4 будет показано, что частотная характеристика многомерного фильтра представляет собой отношение преобразования Фурье от выходного сигнала $F_1(j\omega_\alpha, j\omega_\beta, j\omega t)$ к преобразованию Фурье от входного сигнала $F_0(j\omega_\alpha, j\omega_\beta, j\omega t)$:

$$W(j\omega_\alpha, j\omega_\beta, j\omega t) = \frac{F_1(j\omega_\alpha, j\omega_\beta, j\omega t)}{F_0(j\omega_\alpha, j\omega_\beta, j\omega t)}. \tag{78}$$

Если весовая функция зависит от двух координат, то ее преобразование Фурье

$$W(j\omega_\alpha, j\omega_\beta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} w(\alpha, \beta)\, e^{-j(\omega_\alpha \alpha + \omega_\beta \beta)}\, d\alpha\, d\beta$$

называется пространственной частотной характеристикой. Ее можно записать следующим образом:

$$W(j\omega_\alpha, j\omega_\beta) = U(\omega_\alpha, \omega_\beta) + jV(\omega_\alpha, \omega_\beta); \qquad (79)$$

$$W(j\omega_\alpha, j\omega_\beta) = W(\omega_\alpha, \omega_\beta)\, e^{-j\psi(\omega_\alpha, \omega_\beta)}, \qquad (80)$$

где $U(\omega_\alpha, \omega_\beta)$ — вещественная частотная характеристика;

$V(\omega_\alpha, \omega_\beta)$ — мнимая частотная характеристика;

$W(\omega_\alpha, \omega_\beta)$ — амплитудная частотная характеристика;

$\psi(\omega_\alpha, \omega_\beta)$ — фазовая частотная характеристика.

Между этими характеристиками имеются следующие зависимости:

$$W(\omega_\alpha, \omega_\beta) = \sqrt{[U(\omega_\alpha, \omega_\beta)]^2 + [V(\omega_\alpha, \omega_\beta)]^2}; \qquad (81)$$

$$\psi(\omega_\alpha, \omega_\beta) = \operatorname{arctg}\frac{V(\omega_\alpha, \omega_\beta)}{U(\omega_\alpha, \omega_\beta)}. \qquad (82)$$

Если весовая функция является осесимметричной, то для нахождения амплитудной частотной характеристики необходимо воспользоваться преобразованием Ханкеля:

$$W(\omega) = 2\pi \int\limits_0^\infty \rho I_0(\rho\omega)\, w(\rho)\, d\rho, \qquad (83)$$

где $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$;

$$\omega = \sqrt{\omega_\alpha^2 + \omega_\beta^2}.$$

Амплитудная частотная характеристика такого фильтра обладает симметрией вращения.

Переходные функции

Для двухмерных фильтров существуют два вида переходных функций: одномерная и двухмерная.

Одномерная переходная функция $h(\alpha)$ представляет собой реакцию фильтра на единичный ступенчатый световой сигнал (см. рис. 14,*а*):

$$\sigma(\alpha)' = \begin{cases} 0 & \text{при } \alpha > 0; \\ 1/2 & \text{при } \alpha = 0; \\ 1 & \text{при } \alpha > 0. \end{cases}$$

Для рассматриваемого случая можно ввести одномерную весовую функцию

$$w(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(\alpha,\ \beta)\, d\beta,$$

тогда одномерная переходная функция будет равной

$$h(\alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} w(\alpha)\, d\alpha. \tag{84}$$

Она характеризует собой степень размывания резкой границы раздела между освещенной и неосвещенной половинами единичного сигнала.

Дифференцируя одномерную переходную функцию, можно получить одномерную весовую функцию фильтра

$$w(\alpha) = \frac{dh(\alpha)}{d\alpha}. \tag{85}$$

Двухмерная переходная функция $h(\alpha,\ \beta)$ является реакцией фильтра на единичный сигнал, распространенный в одной четверти плоскости (см. рис.15,*а*):

$$f(\alpha,\ \beta) = \begin{cases} 1 \text{ при } \alpha > 0 \text{ и } \beta > 0; \\ 0 \text{ при остальных } \alpha \text{ и } \beta. \end{cases}$$

Таким образом, двухмерная переходная функция равна:

$$h(\alpha,\ \beta) = \int_{-\infty}^{\alpha} \int_{-\infty}^{\beta} w(\alpha,\ \beta)\, d\alpha\, d\beta. \tag{86}$$

Дифференцируя дважды обе части полученной формулы, получим:

$$w(\alpha,\ \beta) = \frac{d^2 h(\alpha,\ \beta)}{d\alpha\, d\beta}. \tag{87}$$

Физический смысл двухмерной переходной функции такой же, как и одномерной: она определяет собой степень размытости границы освещенной четверти плоскости.

14. Элементарные фильтры

Усилительное звено

Весовая функция усилительного звена выражается с помощью пространственной дельта-функции

$$w(\alpha,\ \beta) = k\delta(\alpha,\ \beta). \tag{88}$$

Примером усилительного звена был бы идеальной безаберрационный объектив, в котором отсутствуют дифракционные явления.

Частотная характеристика звена определяется интегралом

$$W(j\omega_\alpha, j\omega_\beta) = k \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\alpha, \beta)\, e^{-j(\omega_\alpha \alpha + \omega_\beta \beta)} d\alpha\, d\beta.$$

Вычисляя его, имеем:

$$W(j\omega_\alpha, j\omega_\beta) = k. \tag{89}$$

Двухмерная переходная функция усилительного звена равна:

$$h(\alpha, \beta) = k \int_{-\infty}^{\alpha}\int_{-\infty}^{\beta} \delta(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta.$$

Аналитическое выражение этого интеграла имеет следующий вид:

$$h(\alpha, \beta) = \begin{cases} k \text{ при } \alpha > 0 \text{ и } \beta > 0; \\ 0 \text{ при других значениях } \alpha \text{ и } \beta. \end{cases} \tag{90}$$

Эта функция представляет собой единичный сигнал, определенный в четверти плоскости, ординаты которого изменены в k раз.

Сдвигающее звено

Звено, обеспечивающее сдвиг сигнала по осям координат, имеет весовую функцию

$$w(\alpha, \beta) = \delta(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0). \tag{91}$$

Примером такого звена является любое оптическое устройство, изменяющее направление распространения световых лучей без изменения формы сигнала.

Частотная характеристика сдвигающего звена равна:

$$W(j\omega_\alpha, j\omega_\beta) = e^{-j(\omega_\alpha \alpha_0 + \omega_\beta \beta_0)}. \tag{92}$$

Вычисляя другие частотные характеристики звена, получаем:

$$W(\omega_\alpha, \omega_\beta) = 1;$$
$$\psi(\omega_\alpha, \omega_\beta) = -(\omega_\alpha \alpha_0 + \omega_\beta \beta_0);$$
$$U(\omega_\alpha, \omega_\beta) = \cos(\omega_\alpha \alpha_0 + \omega_\beta \beta_0);$$
$$V(\omega_\alpha, \omega_\beta) = -\sin(\omega_\alpha \alpha_0 + \omega_\beta \beta_0).$$

Двухмерная переходная функция сдвигающего звена представляет собой единичный сигнал в четверти плоскости, сдвинутый на величины α_0 и β_0 по осям координат.

Звено с линейчатой весовой функцией

Примером такого звена является цилиндрическая линза, растягивающая изображение точечного источника сигнала в линию. Весо-

вая функция звена может быть представлена в виде одномерной дельта-функции

$$w(\alpha,\ \beta)=\delta(\alpha),$$

а с учетом ее смещения по оси α имеем:

$$w(\alpha,\ \beta)=\delta(\alpha-\alpha_0). \qquad (93)$$

Находя прямое преобразование Фурье от этих функций, получаем:

$$\left.\begin{aligned} W(j\omega_\alpha,\ j\omega_\beta) &= \delta(\omega_\beta);\\ W(j\omega_\alpha,\ j\omega_\beta) &= \delta(\omega_\beta)\, e^{-j\omega_\alpha \alpha_0}. \end{aligned}\right\} \qquad (94)$$

Другие частотные характеристики звена определяются выражениями:

$$W(\omega_\alpha,\ \omega_\beta) = \delta(\omega_\beta);$$
$$\psi(\omega_\alpha,\ \omega_\beta) = -\omega_\alpha\alpha_0;$$
$$U(\omega_\alpha,\ \omega_\beta) = \delta(\omega_\beta)\cos\omega_\alpha\alpha_0;$$
$$V(\omega_\alpha,\ \omega_\beta) = -\delta(\omega_\beta)\sin\omega_\alpha\alpha_0.$$

Одномерная переходная функция звена имеет следующий вид:

$$h(\alpha)=\sigma(\alpha). \qquad (95)$$

Если же весовая функция звена определяется выражением

$$w(\alpha,\ \beta)=\delta(\beta),$$

то его переходная функция

$$h(\alpha)=1.$$

Следовательно, переходная функция в этом случае представляет собой плоскость, параллельную плоскости $\alpha 0\beta$.

Звено с прямоугольной весовой функцией

Аналитическое выражение весовой функции в виде прямоугольного параллелепипеда имеет следующий вид:

$$w(\alpha,\ \beta)=\begin{cases} 1 \text{ при } -\frac{\alpha_1}{2}<\alpha<\frac{\alpha_1}{2} \text{ и } -\frac{\beta_1}{2}<\beta<\frac{\beta_1}{2};\\ 0 \text{ при } \alpha>\frac{\alpha_1}{2},\ \alpha<-\frac{\alpha_1}{2} \text{ или } \beta>\frac{\beta_1}{2},\ \beta<-\frac{\beta_1}{2}. \end{cases} \qquad (96)$$

Примером такого звена может служить диафрагма с прямоугольным отверстием (см. рис. 19,*б*).

Частотная характеристика звена определяется интегралом

$$W(j\omega_\alpha,\ j\omega_\beta)=\int\limits_{-\frac{\alpha_1}{2}}^{\frac{\alpha_1}{2}}\int\limits_{-\frac{\beta_1}{2}}^{\frac{\beta_1}{2}} e^{-j(\omega_\alpha\alpha+\omega_\beta\beta)}\,d\alpha\,d\beta.$$

Разделяя интегралы и производя интегрирование, получаем:

$$W(j\omega_\alpha,\ j\omega_\beta)=\frac{4}{\omega_\alpha\omega_\beta}\sin\omega_\alpha\frac{\alpha_1}{2}\sin\omega_\beta\frac{\beta_1}{2}. \tag{97}$$

Такую же форму имеет и амплитудная частотная характеристика.

Если весовая функция несимметрична относительно начала координат

$$w(\alpha,\ \beta)=\begin{cases}1 \text{ при } 0<\alpha<\frac{\alpha_1}{2} \text{ и } -\frac{\beta_1}{2}<\beta<\frac{\beta_1}{2};\\ 0 \text{ при остальных значениях } \alpha \text{ и } \beta,\end{cases}$$

то частотная характеристика звена имеет следующий вид:

$$W(j\omega_\alpha,\ j\omega_\beta)=-\frac{2}{j\omega_\alpha\omega_\beta}e^{-j\omega_\alpha\frac{\alpha_1}{2}}\sin\omega_\beta\frac{\beta_1}{2}.$$

Если центр весовой функции отклонен от начала координат в другую сторону, то частотная характеристика его будет:

$$W(j\omega_\alpha,\ j\omega_\beta)=-\frac{2}{j\omega_\alpha\omega_\beta}e^{j\omega_\alpha\frac{\alpha_1}{2}}\sin\omega_\beta\frac{\beta_1}{2}.$$

Одномерная переходная функция звена равна:

$$h(\alpha)=\frac{1}{\alpha_1}\int\limits_{-\frac{\alpha_1}{2}}^{\alpha}d\alpha,$$

откуда имеем:

$$h(\alpha)=\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{\alpha_1}. \tag{98}$$

На рис. 23 изображены все характеристики звена с прямоугольной весовой функцией.

Звено с круговой весовой функцией

Примером рассматриваемого звена является диафрагма с круглым отверстием, изображенная на рис. 19,*а*.

Для нахождения амплитудной частотной характеристики воспользуемся преобразованием Ханкеля, положив $w(\rho)=1$:

$$W(\omega)=2\pi\int\limits_0^R \rho I_0(\rho\omega)\,d\rho,$$

где R — радиус круга.

Учитывая известное равенство

$$d[(\rho\omega)^n I_n(\rho\omega)] = (\rho\omega)^n I_{n-1}(\rho\omega)\, d(\rho\omega),$$

вычислим интеграл

$$W(\omega) = 2\pi R^2 \frac{I_1(R\omega)}{R\omega}. \qquad (99)$$

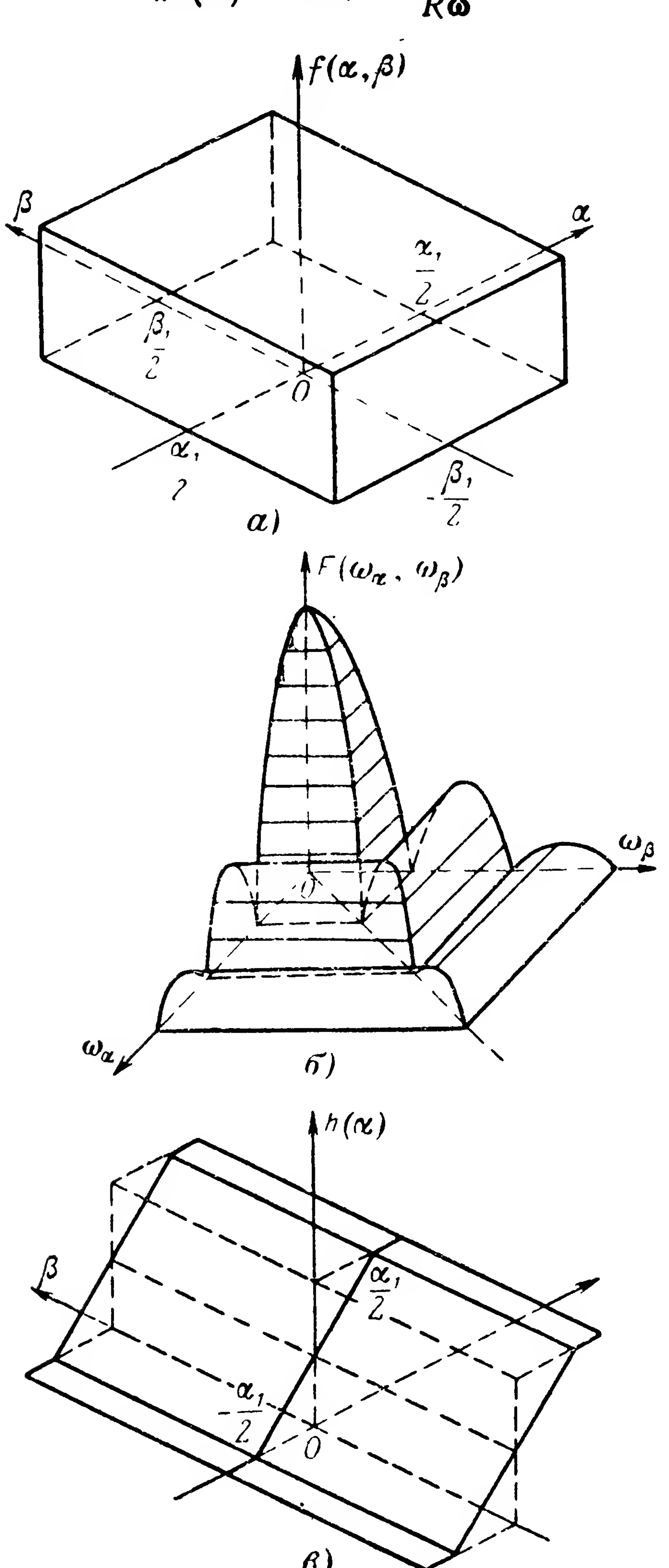


Рис. 23. Звено с прямоугольной весовой функцией.

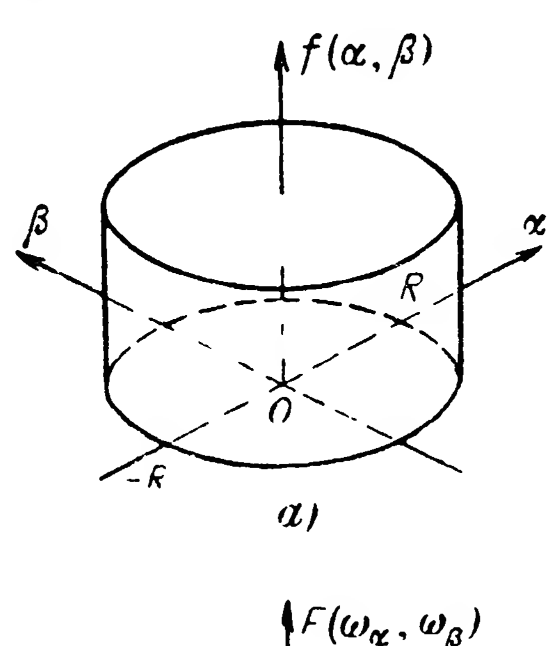
а — весовая функция; *б* — амплитудная частотная характеристика; *в* — переходная функция.

Частотная характеристика звена обладает симметрией вращения.

Для определения одномерной переходной функции звена необходимо вычислить следующий интеграл:

$$h(\alpha) = \frac{2}{\pi R^2} \int_{-R}^{\alpha} \sqrt{R^2 - \alpha^2}\, d\alpha,$$

где $\beta = \sqrt{R^2 - \alpha^2}$ — уравнение окружности.



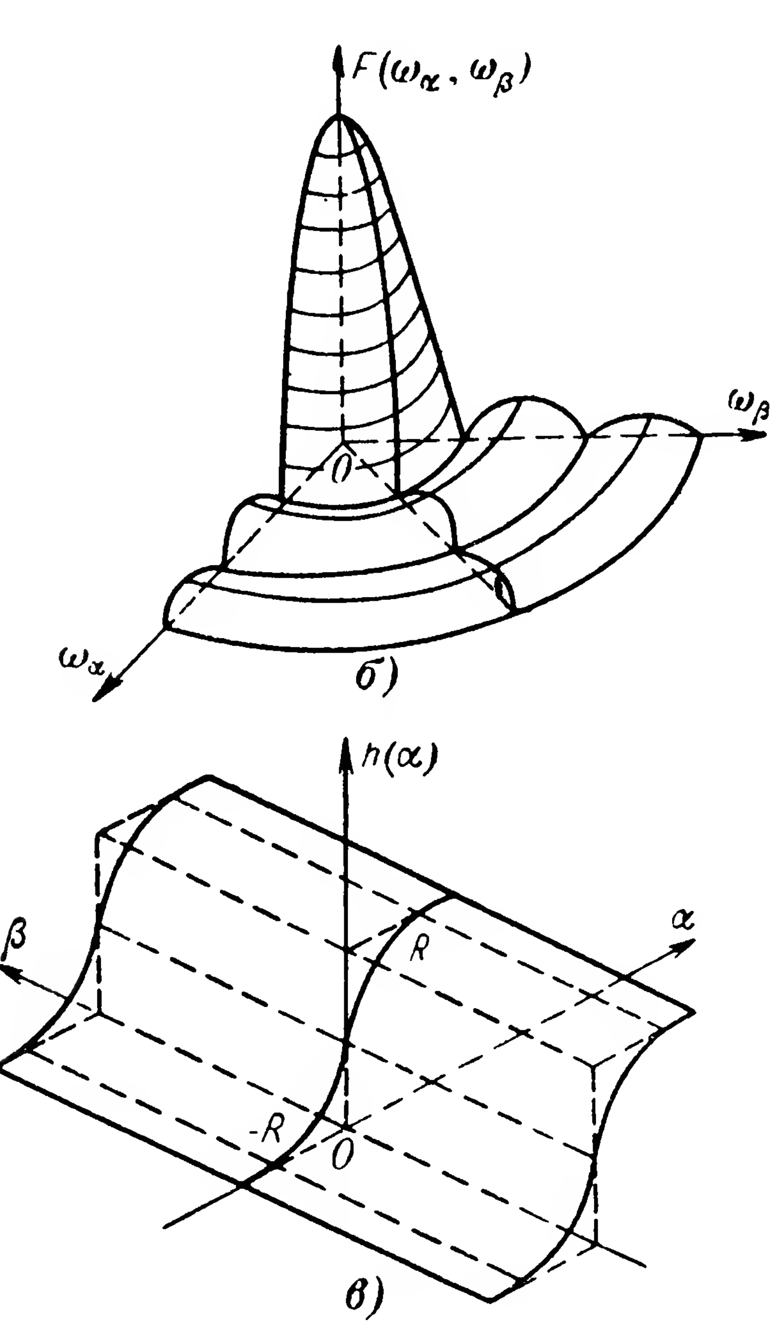


Рис. 24. Звено с круговой весовой функцией.

а — весовая функция; *б* — амплитудная частотная характеристика; *в* — переходная функция.

Интегрируя это выражение, имеем:

$$h(\alpha)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{2\alpha}{\pi R}\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{R^2}}-\frac{2}{\pi}\arcsin\frac{\alpha}{R}\right). \qquad (100)$$

При $\alpha=0$ получим, что $h(\alpha)=1/2$.

Вид весовой функции, частотной характеристики и одномерной переходной функции представлен на рис. 24.

Звено с колокольной весовой функцией

Рассматриваемое звено обладает следующей весовой функцией:

$$w(\alpha,\beta)=\frac{\rho_1^2}{\pi r_1^2}e^{-\rho_1^2\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{r_1^2}\right)}, \qquad (101)$$

где $\rho_1=0{,}4769$ — постоянная величина;

r_1 — радиус, в пределах которого сосредоточено 50% энергии светового сигнала.

Такой функцией может быть аппроксимирована функция рассеяния света в аберрационном пятне объектива.

Частотная характеристика звена равна:

$$W(j\omega_\alpha, j\omega_\beta)=\frac{\rho_1^2}{\pi r_1^2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\rho_1^2\frac{\alpha^2}{r_1^2}-j\omega_\alpha\alpha}d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\rho_1^2\frac{\beta^2}{r_1^2}-j\omega_\beta\beta}d\beta.$$

Для вычисления этих интегралов воспользуемся известными соотношениями:

$$e^{-j\omega_\alpha\alpha}=\cos\omega_\alpha\alpha-j\sin\omega_\alpha\alpha,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\rho_1^2\frac{\alpha^2}{r_1^2}}\sin\omega_\alpha\alpha d\alpha=0,$$

тогда

$$W(j\omega_\alpha, j\omega_\beta)=\frac{4\rho_1^2}{\pi r_1^2}\int_0^{\infty}e^{-\rho_1^2\frac{\alpha^2}{r_1^2}}\cos\omega_\alpha\alpha d\alpha\int_0^{\infty}e^{-\rho_1^2\frac{\beta^2}{r_1^2}}\cos\omega_\beta\beta d\beta.$$

Учитывая, что

$$\int_0^{\infty}e^{-a^2x^2}\cos bx\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-\frac{b^2}{4a^2}},$$

получаем:

$$W(j\omega_\alpha, j\omega_\beta)=e^{-\frac{r_1^2}{4\rho_1^2}(\omega_\alpha^2+\omega_\beta^2)}, \qquad (102)$$

Таково же выражение амплитудной и вещественной частотных характеристик. Фазовая и мнимая частотные характеристики звена равны нулю.

Из формул (101) и (102) следует, что с увеличением радиуса r_1 весовая функция расширяется, а частотная характеристика сужается.

Рассмотрим теперь весовую функцию, не обладающую вращательной симметрией:

$$w(\alpha, \beta) = \frac{\rho_1^2}{\pi r_1^2} e^{-\rho_1^2 \left(\frac{\alpha^2 + a\alpha\beta + \beta^2}{r_1^2} \right)}. \qquad (103)$$

Сечения этой функции плоскостями, параллельными плоскости $\alpha 0 \beta$, представляют собой эллипсы

$$\alpha^2 + a\alpha\beta + \beta^2 = 1.$$

Из табл. 4 следует, что такой весовой функцией может быть аппроксимирована функция рассеяния света объективом, если он обладает следующими видами аберраций: комой, астигматизмом, кривизною поля или хроматизмом увеличения.

Частотная характеристика звена равна:

$$W(j\omega_\alpha, j\omega_\beta) = \frac{\rho_1^2}{\pi r_1^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\rho_1^2 \left(\frac{\alpha^2 + a\alpha\beta + \beta^2}{r_1^2} \right) - j(\omega_\alpha \alpha + \omega_\beta \beta)} d\alpha\, d\beta.$$

Для разделения интегралов приведем уравнение эллипса к каноническому виду, повернув оси координат на угол γ. Матрица поворота имеет вид:

$$M_\gamma = \begin{Vmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{Vmatrix}.$$

Угол поворота $\gamma = \pi/4$, следовательно,

$$M_\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Отсюда следует, что связь между старыми и новыми координатами определяется равенствами

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha' - \beta');$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha' + \beta').$$

Уравнение эллипса в новых координатах будет следующим:

$$\left(1 + \frac{a}{2}\right)(\alpha')^2 + \left(1 - \frac{a}{2}\right)(\beta')^2 = 1.$$

Производя замену переменных в интеграле, определяющем частотную характеристику, имеем:

$$W(j\omega_\alpha, j\omega_\beta) = \frac{\rho_1^2}{\pi r_1^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \times$$

$$\times e^{-\frac{\rho_1^2}{r_1^2}\left[\left(1+\frac{a}{2}\right)(\alpha')^2+\left(1-\frac{a}{2}\right)(\beta')^2\right]-\frac{j}{\sqrt{2}}[\omega_\alpha(\alpha'-\beta')+\omega_\beta(\alpha'+\beta')]} d\alpha' d\beta'.$$

После разделения интегралов и преобразования получим:

$$W(j\omega_\alpha, j\omega_\beta) = \frac{4\rho_1^2}{\pi r_1^2} \int\limits_0^\infty e^{-\frac{\rho_1^2}{r_1^2}\left(1+\frac{a}{2}\right)(\alpha')^2} \times$$

$$\times \cos\left(\frac{\omega_\alpha+\omega_\beta}{\sqrt{2}}\right)\alpha' d\alpha' \int\limits_0^\infty e^{-\frac{\rho_1^2}{r_1^2}\left(1-\frac{a}{2}\right)(\beta')^2} \cos\left(\frac{\omega_\beta-\omega_\alpha}{\sqrt{2}}\right)\beta' d\beta'.$$

Вычислив эти интегралы, найдем частотную характеристику

$$W(j\omega_\alpha, j\omega_\beta) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}} e^{-\frac{r_1^2}{4\rho_1^2\left(1-\frac{a^2}{4}\right)}(\omega_\alpha^2 - a\omega_\alpha\omega_\beta + \omega_\beta^2)} . \quad (104)$$

На рис. 25,*а* и *б* изображены колокольная весовая функция и амплитудная частотная характеристика соответствующего ей звена. Сечения амплитудной частотной характеристики плоскостями, параллельными плоскости $\omega_\alpha 0 \omega_\beta$, представляют эллипсы

$$\omega_\alpha^2 - a\omega_\alpha\omega_\beta + \omega_\beta^2 = 1.$$

Большие оси этих эллипсов повернуты на угол $\pi/2$ по отношению к большим осям эллипсов, получающихся при сечении весовой функции звена плоскостями, параллельными плоскости $\alpha 0 \beta$.

Одномерная переходная функция звена равняется

$$h(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{\alpha} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_1^2}{\pi r_1^2} e^{-\rho_1^2\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{r_1^2}\right)} d\alpha\, d\beta,$$

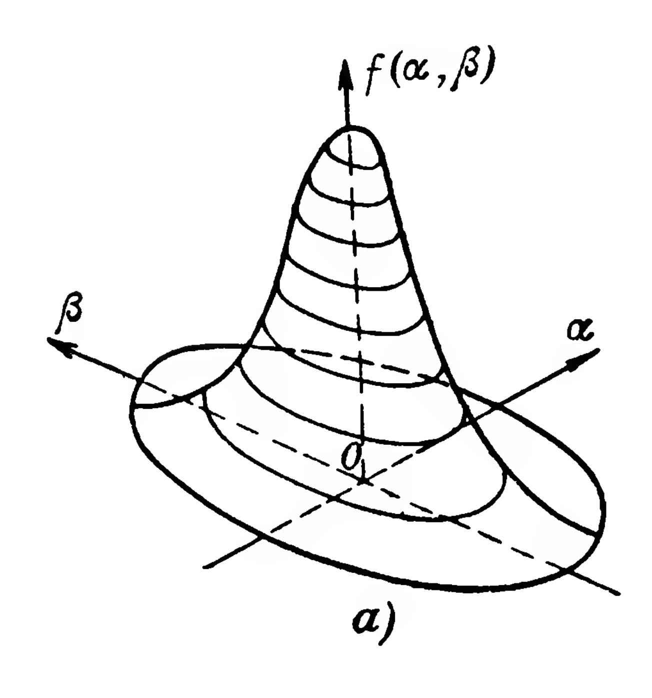
откуда

$$h(\alpha) = \frac{1}{2}\left[1 + \Phi_1\left(\frac{\alpha}{r_1}\right)\right], \quad (105)$$

где $\Phi_1(x) = \frac{2\rho_1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^x e^{-\rho_1^2 x^2} dx$ — приведенная функция Лапласа.

Двухмерная переходная функция звена определяется интегралом

$$h(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{\alpha} \int_{-\infty}^{\beta} \frac{\rho_1^2}{\pi r_1^2} e^{-\rho_1^2 \left(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{r_1^2}\right)} d\alpha\, d\beta.$$



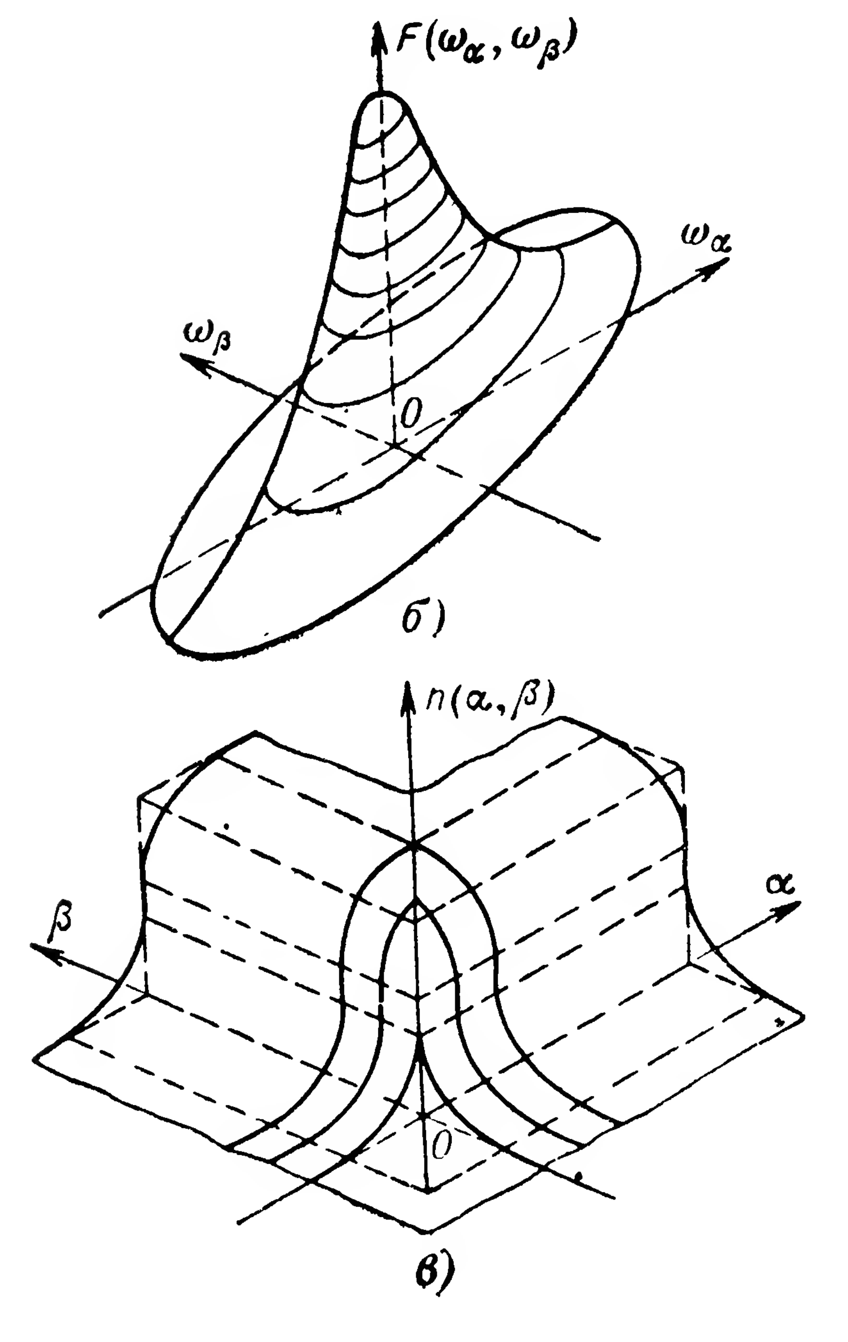


Рис. 24. Звено с круговой весовой функцией.

а — весовая функция; *б* — амплитудная частотная характеристика; *в* — переходная функция.

Вычисляя интеграл, получаем:

$$h(\alpha, \beta) = \frac{1}{4}\left[1 + \Phi_1\left(\frac{\alpha}{r_1}\right)\right]\left[1 + \Phi_1\left(\frac{\beta}{r_1}\right)\right]. \qquad (106)$$

Графическое изображение этой функции представлено на рис. 25,*в*.

15. Фильтры со сложными весовыми функциями

Если весовая функция фильтра может быть разбита на конечное число составляющих, которые представляются в аналитической форме,

$$w(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=m} w_{ik}(\alpha, \beta),$$

о частотная характеристика фильтра равняется сумме:

$$W(j\omega_\alpha, j\omega_\beta) = \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=m} W_{ik}(j\omega_\alpha, j\omega_\beta).$$

В случае, когда весовая функция определена экспериментально, она может быть приближенно разбита на участки, частотные характеристики которых легко вычисляются аналитически.

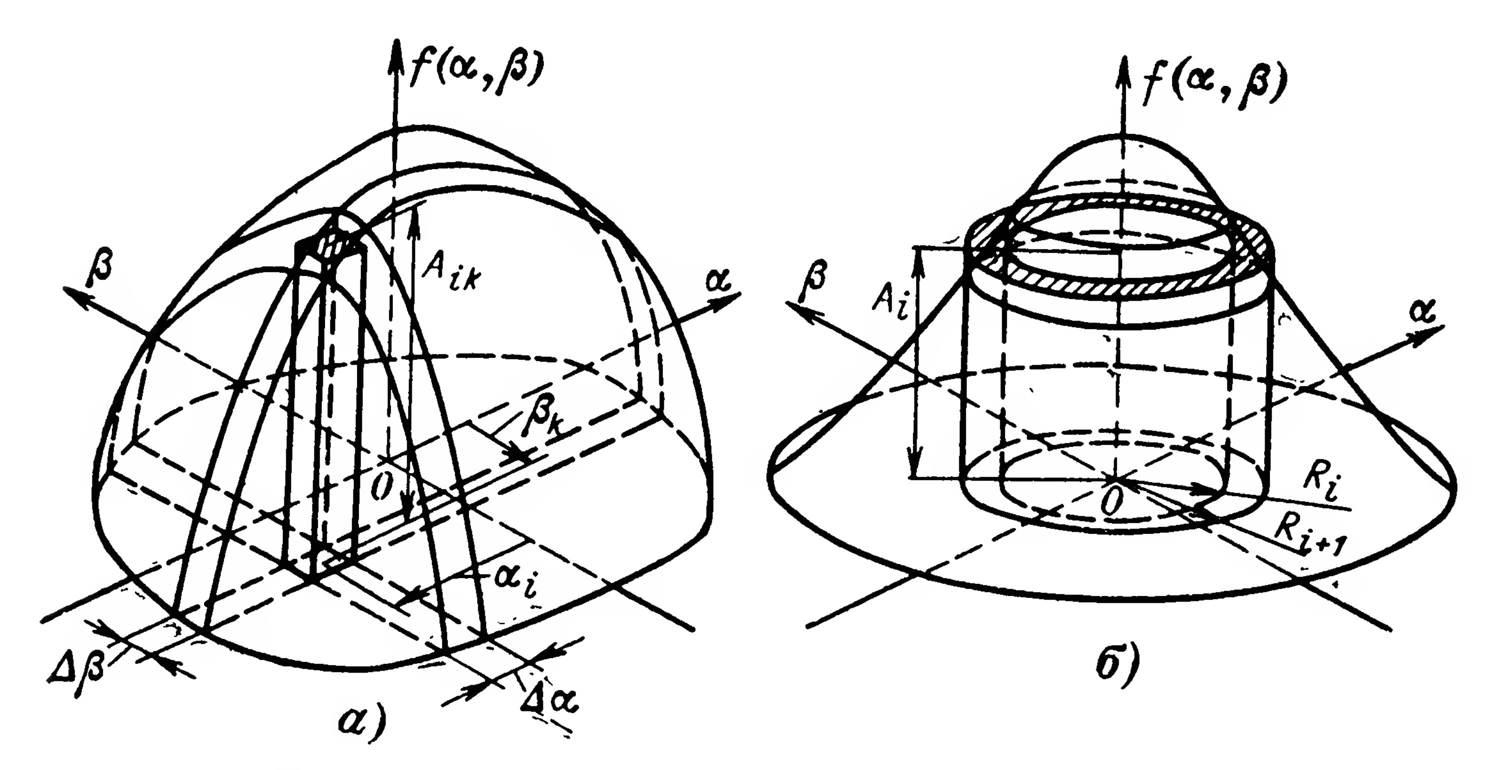


Рис. 26. Схемы разбиения весовых функций.
а — на прямоугольники; б — на кольца.

Если разбить весовую функцию на элементарные прямоугольники (рис. 26,*а*), то их частотные характеристики будут:

$$\Delta W_{ik}(j\omega_\alpha, j\omega_\beta) = \frac{4A_{ik}}{\omega_\alpha\omega_\beta}\sin\omega_\alpha\frac{\Delta\alpha}{2}\sin\omega_\beta\frac{\Delta\beta}{2}e^{j(\omega_\alpha\alpha_i + \omega_\beta\beta_k)},$$

где A_{ik} — амплитуда элементарных составляющих весовой функции;

$\Delta\alpha$, $\Delta\beta$ — размеры прямоугольников;

α_i, β_k — координаты центров прямоугольников.

Частотная характеристика фильтра равняется сумме

$$W(j\omega_\alpha, j\omega_\beta) = \frac{4}{\omega_\alpha\omega_\beta} \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=m} A_{ik} e^{j(\omega_\alpha \alpha_i + \omega_\beta \beta_k)} \times$$

$$\times \sin \omega_\alpha \frac{\Delta\alpha}{2} \sin \omega_\beta \frac{\Delta\beta}{2}. \qquad (107)$$

При уменьшении размеров прямоугольников имеем:

$$\lim_{\substack{\Delta\alpha \to 0 \\ \Delta\beta \to 0}} \frac{4}{\omega_\alpha\omega_\beta} \sin \omega_\alpha \frac{\Delta\alpha}{2} \sin \omega_\beta \frac{\Delta\beta}{2} = \Delta\alpha\Delta\beta,$$

поэтому частотная характеристика будет равной:

$$W(j\omega_\alpha, j\omega_\beta) = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=m} A_{ik} e^{j(\omega_\alpha \alpha_i + \omega_\beta \beta_k)} \Delta\alpha\Delta\beta. \qquad (108)$$

Полученная формула представляет собой интеграл Фурье, выраженный в конечном виде.

Действительная и мнимая частотные характеристики определяются формулами

$$U(\omega_\alpha, \omega_\beta) = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=m} A_{ik} \cos(\omega_\alpha \alpha_i + \omega_\beta \beta_k) \Delta\alpha\Delta\beta;$$

$$V(\omega_\alpha, \omega_\beta) = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=m} A_{ik} \sin(\omega_\alpha \alpha_i + \omega_\beta \beta_k) \Delta\alpha\Delta\beta.$$

Если весовая функция обладает симметрией вращения, то ее целесообразно разбить на ряд цилиндрических колец (рис. 26, *б*), частотные характеристики которых

$$\Delta W_i^r(\omega) = A_i 2\pi \left[R_{i+1}^2 \frac{I_1(R_{i+1}\omega)}{R_{i+1}\omega} - R_i^2 \frac{I_1(R_i\omega)}{R_i\omega} \right],$$

где R_i, R_{i+1} — радиусы кольца.

Амплитудно-частотная характеристика фильтра равняется сумме элементарных составляющих

$$W(\omega) = \frac{2\pi}{\omega} \sum_{i=0}^{i=n} A_i [R_{i+1} I_1(R_{i+1}\omega) - R_i I_1(R_i\omega)]. \qquad (109)$$

Переходя к пределу при малой толщине цилиндрического кольца, получаем:

$$W(\omega) = 2\pi \sum_{i=0}^{i=n} A_i I_0 (R_i \omega) R_i \Delta R. \qquad (110)$$

Эта формула может быть непосредственно получена из интеграла Ханкеля.

16. Фильтры с весовыми функциями, меняющимися во времени

Поступательное перемещение весовой функции

При перемещении весовой функции в пространстве ее аналитическое выражение имеет следующий вид:

$$w = w[\vec{\rho} + \vec{r}(t)],$$

где $\vec{r}(t)$ — вектор смещения.

Учитывая одно из свойств преобразований Фурье (см. табл. 2), найдем частотную характеристику фильтра:

$$W(j\vec{\omega}, t) = e^{-j\vec{\omega}\vec{r}(t)} W(j\vec{\omega}), \qquad (111)$$

где $W(j\vec{\omega})$ — частотная ·характеристика фильтра, весовая функция которого находится в покое.

Для иллюстрации принципа нахождения весовой функции и частотной характеристики по формуле (111) рассмотрим следующий пример.

Пример 1. Пусть весовая функция колокольной формы перемещается с постоянной скоростью, тогда она может быть представлена в таком виде [см. формулу (101)]:

$$w(\alpha, \beta, t) = \frac{\rho_1^2}{\pi r_1^2} e^{-\frac{\rho_1^2}{r_1^2}[(\alpha - \dot{\alpha}_0 t)^2 + (\beta - \dot{\beta}_0 t)^2]}.$$

Частотная характеристика звена будет:

$$W(j\omega_\alpha, j\omega_\beta, t) = e^{-\frac{r_1^2}{4\rho_1^2}(\omega_\alpha^2 + \omega_\beta^2) + j(\omega_\alpha \dot{\alpha}_0 + \omega_\beta \dot{\beta}_0)t} \qquad (112)$$

Амплитудная частотная характеристика звена

$$W(\omega_\alpha, \omega_\beta) = e^{-\frac{r_1^2}{4\rho_1^2}(\omega_\alpha^2 + \omega_\beta^2)}$$

не зависит от времени, а фазовая частотная характеристика

$$\psi(\omega_\alpha, \omega_\beta, t) = \omega_\alpha \dot{\alpha}_0 t + \omega_\beta \dot{\beta}_0 t$$

изменяется с течением времени по линейному закону.

Вращение весовой функции

Если весовая функция звена вращается, причем ее угол поворота является функцией времени

$$\gamma=\gamma(t),$$

то частотная характеристика фильтра имеет следующий вид:

$$W(j\vec{\omega}, t) = W[jM_{\gamma(t)}\vec{\omega}], \tag{113}$$

где $M_{\gamma(t)} = \begin{Vmatrix} \cos\gamma(t) - \sin\gamma(t) \\ \sin\gamma(t) \ \cos\gamma(t) \end{Vmatrix}$ — матрица вращения.

Рассмотрим примеры, иллюстрирующие принцип определения частотной характеристики при вращении весовой функции.

Пример 2. Пусть весовая функция сдвигающего звена вращается с постоянной угловой скоростью, тогда его частотная характеристика определяется выражением

$$W[[j\omega'_\alpha(t), j\omega'_\beta(t)] = e^{-j[\alpha_0\omega'_\alpha(t)+\beta_0\omega'_\beta(t)]}.$$

Составляющие частоты определяются следующими формулами:

$$\omega'_\alpha(t) = \omega_\alpha\cos\dot{\gamma}t - \omega_\beta\sin\dot{\gamma}t;$$

$$\omega'_\beta(t) = \omega_\alpha\sin\dot{\gamma}t + \omega_\beta\cos\dot{\gamma}t.$$

Следовательно, частотная характеристика фильтра будет:

$$W(j\omega_\alpha, j\omega_\beta, t) = e^{-j[\cos\dot{\gamma}t(\alpha_0\omega_\alpha + \beta_0\omega_\beta)+\sin\dot{\gamma}t(\beta_0\omega_\alpha-\alpha_0\omega_\beta)]}. \tag{114}$$

Пример 3. Рассмотрим фильтр с весовой функцией колокольной формы, вращающейся с постоянной скоростью. Частотная характеристика такого фильтра равна:

$$W(j\omega_\alpha, j\omega_\beta, t) = e^{-\frac{r_1^2}{4\rho_1^2}[(\omega_\alpha\cos\dot{\gamma}t-\omega_\beta\sin\dot{\gamma}t)^2+(\omega_\alpha\sin\dot{\gamma}t+\omega_\beta\cos\dot{\gamma}t)^2]}.$$

Преобразуя ее, имеем:

$$W(j\omega_\alpha, j\omega_\beta, t) = e^{-\frac{r_1^2}{4\rho_1^2}[\omega_\alpha^2(\cos^2\dot{\gamma}t+\sin^2\dot{\gamma}t)+\omega_\beta^2(\cos^2\dot{\gamma}t+\sin^2\dot{\gamma}t)]}.$$

Отсюда следует, что

$$W(j\omega_\alpha, j\omega_\beta, t) = W(j\omega_\alpha, j\omega_\beta).$$

Таким образом, частотная характеристика колокольного звена при вращении его весовой функции не изменяется с течением времени.

Растяжение весовой функции

При растяжении весовой функции фильтра его частотная характеристика определяется формулой

$$W(j\vec{\omega},t)=\frac{1}{|\det Mt|}W_{*}^{*}(jM_t^{-1}\vec{\omega}),\qquad(115)$$

где $Mt=\begin{Vmatrix} a_{11}(t) & 0 & 0\\ 0 & a_{22}(t) & 0\\ 0 & 0 & a_{33}(t)\end{Vmatrix}$ — матрица растяжения;

$M_t^{-1}=\begin{Vmatrix} \frac{1}{a_{11}(t)} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{a_{22}(t)} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{a_{33}(t)}\end{Vmatrix}$ — обратная матрица.

Проиллюстрируем формулу (115) решением следующего примера.

Пример 4. Рассмотрим случай равномерного растяжения весовой функции, имеющей прямоугольную форму. Матрица растяжения и обратная ей матрица имеют следующий вид:

$$Mt=\begin{Vmatrix} a_{11}t & 0\\ 0 & a_{22}t\end{Vmatrix};$$

$$M_t^{-1}=\begin{Vmatrix} \frac{1}{a_{11}t} & 0\\ 0 & \frac{1}{a_{22}t}\end{Vmatrix},$$

а определитель матрицы равен:

$$\det Mt=a_{11}a_{22}t^2.$$

Составляющие вектора частоты по осям координат будут:

$$\omega'_\alpha=\frac{\omega_\alpha}{a_{11}t};$$

$$\omega'_\beta=\frac{\omega_\beta}{a_{22}t},$$

поэтому частотная характеристика фильтра имеет вид:

$$W=(j\omega_\alpha,j\omega_\beta,t)=\frac{4}{\omega_\alpha\omega_\beta}\sin\omega_\alpha\frac{\alpha_1}{2a_{11}t}\sin\frac{\beta_1}{2a_{22}t}.\qquad(116)$$

Эта зависимость могла быть получена непосредственно из физических соображений, так как смысл растяжения прямоугольной весовой функции заключается в изменении сторон прямоугольника с течением времени.

Глава четвертая

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СВЕТОВЫХ СИГНАЛОВ МНОГОМЕРНЫМИ ФИЛЬТРАМИ

17. Определение характеристик сигналов на выходе фильтров с помощью многомерных интегралов свертки

Входной световой сигнал любой формы может быть представлен в виде наложения последовательности элементарных импульсов (см. рис. 26). Если устремить площадь элементарного импульса к нулю, тогда амплитуда его устремится к бесконечности и он в пределе превратится в пространственную дельта-функцию. Таким образом, любой световой сигнал можно представить в виде бесконечной последовательности пространственных дельта-функций.

Если учесть известное свойство пространственной дельта-функции, то световой сигнал на входе фильтра может быть представлен в следующем виде:

$$f_0(\alpha,\beta)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta(\alpha-\mu,\ \beta-\nu)\,f_0(\mu,\nu)\,d\mu\,d\nu.$$

Каждый из бесконечно малых импульсов

$$f_0(\mu,\ \nu)\,\delta(\alpha-\mu,\ \beta-\nu)\,d\mu\,d\nu$$

вызывает на выходе фильтра элементарный сигнал, равный:

$$f_0(\mu,\ \nu)\,w(\alpha-\mu,\ \beta-\nu)\,d\mu\,d\nu,$$

так как весовая функция фильтра является его реакцией на входной сигнал в виде пространственной дельта-функции.

Суммарный выходной сигнал представляется двухмерным интегралом свертки

$$f_1(\alpha,\beta)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}w(\alpha-\mu,\ \beta-\nu)\,f_0(\mu,\nu)\,d\mu\,d\nu, \qquad (117)$$

называемым также интегралом Дюамеля. Интеграл Дюамеля может быть представлен и в векторной форме:

$$f_1(\vec{\rho})=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}w(\vec{\rho}-\vec{r})\,f_0(\vec{r})\,d\vec{r}.$$

Проиллюстрируем формулу (117) решением следующих примеров.

Пример 1. Рассмотрим преобразование точечного светового сигнала

$$f_0(\alpha,\ \beta)=\delta(\alpha-\alpha_0,\ \beta-\beta_0)$$

звеном с колокольной весовой функцией

$$w(\alpha,\beta)=\frac{\rho_1^2}{\pi r_1^2}e^{-\frac{\rho_1^2}{r_1^2}(\alpha^2+\beta^2)}.$$

Интеграл свертки в этом случае имеет следующий вид:

$$f_1(\alpha,\beta)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\rho_1^2}{\pi r_1^2}e^{-\frac{\rho_1^2}{r_1^2}[(\alpha-\mu)^2+(\beta-\nu)^2]}\delta(\mu-\alpha_0,\nu-\beta_0)\times$$

$$\times d\mu\,d\nu.$$

Интегрируя это выражение, получаем:

$$f_1(\alpha,\beta)=\frac{\rho_1^2}{\pi r_1^2}e^{-\frac{\rho_1^2}{r_1^2}[(\alpha+a_0)^2+(\beta+\beta_0)^2]}. \qquad (118)$$

Пример 2. Рассмотрим световой сигнал в виде наложения множества пространственных дельта-функций

$$f_0(\alpha,\beta)=\sum_{i=-n}^{i=n}\sum_{k=-m}^{k=m}\delta(\alpha-\alpha_i,\beta-\beta_k),$$

который преобразуется фильтром с колокольной весовой функцией

$$w(\alpha,\beta)=\frac{\rho_1^2}{\pi r_1^2}e^{-\frac{\rho_1^2}{r_1^2}(\alpha^2+\beta^2)}.$$

Выходной сигнал определяется интегралом

$$f_1(\alpha,\beta)=\sum_{i=-n}^{i=n}\sum_{k=-m}^{k=m}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta(\alpha-\alpha_i-\mu,\beta-\beta_k-\nu)\frac{\rho_1^2}{\pi r_1^2}\times$$

$$\times e^{-\frac{\rho_1^2}{r_1^2}(\mu^2+\nu^2)}d\mu\,d\nu,$$

откуда

$$f_1(\alpha,\beta)=\sum_{i=-n}^{i=n}\sum_{k=-m}^{k=m}\frac{\rho_1^2}{\pi r_1^2}e^{-\frac{\rho_1^2}{r_1^2}[(\alpha-\alpha_i)^2+(\beta-\beta_k)^2]}. \qquad (119)$$

Он представляет собой совокупность сигналов колокольной формы, распределенных в плоскости $\alpha 0 \beta$.

18. Определение формы выходных сигналов с использованием частотных характеристик

Возьмем от обеих частей интеграла Дюамеля преобразования Фурье, тогда

$$F_1(j\vec{\omega})=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-j\vec{\omega}\vec{\rho}}\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}w(\vec{\rho}-\vec{r})f_0(\vec{r})d\vec{r}\right]d\vec{\rho}.$$

Введем новую переменную

$$\vec{z} = \vec{\rho} - \vec{r}$$

и преобразуем интегралы

$$F_1(j\vec{\omega}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\vec{\omega}\vec{z}}\, w(\vec{z})\, d\vec{z} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\vec{\omega}\vec{r}} f_0(\vec{r})\, d\vec{r}.$$

Отсюда следует, что

$$F_1(j\vec{\omega}) = W(j\vec{\omega})\, F_0(j\vec{\omega}). \qquad (120)$$

При решении многих практических задач достаточно знания спектра выходного сигнала $F_1(j\vec{\omega})$. Однако в ряде случаев необходимо определять пространственную форму выходного сигнала, для чего следует воспользоваться обратным преобразованием Фурье:

$$f_1(\vec{\rho}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(j\vec{\omega})\, e^{j\vec{\omega}\vec{\rho}}\, d\vec{\omega}. \qquad (121)$$

Рассмотрим примеры вычисления формы выходного сигнала.

Пример 1. Пусть единичный сигнал, распространенный в четверти плоскости, преобразуется звеном с весовой функцией колокольной формы. Характеристики их определяются выражениями

$$F_0(j\omega_\alpha, j\omega_\beta) = \frac{1}{\omega_\alpha \omega_\beta};$$

$$W(j\omega_\alpha, j\omega_\beta) = e^{-\frac{r_1^2}{4\rho_1^2}(\omega_\alpha^2 + \omega_\beta^2)},$$

поэтому спектр выходного сигнала равен:

$$F_1(j\omega_\alpha, j\omega_\beta) = \frac{1}{\omega_\alpha \omega_\beta} e^{-\frac{r_1^2}{4\rho_1^2}(\omega_\alpha^2 + \omega_\beta^2)}.$$

Форма выходного сигнала определяется следующим интегралом:

$$f_1(\alpha, \beta) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\omega_\alpha \omega_\beta} e^{-\frac{r_1^2}{4\rho_1^2}(\omega_\alpha^2 + \omega_\beta^2)} \times$$

$$\times e^{j(\omega_\alpha \alpha + \omega_\beta \beta)}\, d\omega_\alpha\, d\omega_\beta.$$

Непосредственное вычисление этого интеграла с использованием метода вычетов невозможно, так как подынтегральная функция имеет полюс на вещественной оси.

Для вычисления интеграла воспользуемся тем фактом, что его значение соответствует двухмерной переходной функции, являю-

щейся реакцией звена с колокольной весовой функцией на единичный сигнал в четверти плоскости:

$$f_1(\alpha,\beta)=\int\limits_{-\infty}^{\alpha}\int\limits_{-\infty}^{\beta}\frac{\rho_1^2}{\pi r_1^2}e^{-\rho_1^2\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{r_1^2}\right)}d\alpha\, d\beta.$$

Значение этого интеграла приводилось в гл. 3 [см. формулу (106)], поэтому

$$f_1(\alpha,\beta)=\frac{1}{4}\left[1+\Phi_1\left(\frac{\alpha}{r_1}\right)\right]\left[1-\Phi_1\left(\frac{\beta}{r_1}\right)\right]. \qquad (122)$$

Если единичный сигнал сдвинут относительно начала координат, от его спектр будет:

$$F_0(j\omega_\alpha, j\omega_\beta)=\frac{1}{\omega_\alpha\omega_\beta}e^{-j(\omega_\alpha\alpha_0+\omega_\beta\beta_0)}.$$

Выходной сигнал равен:

$$f_1(\alpha,\beta)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\omega_\alpha\omega_\beta}e^{-\frac{r_1^2}{4\rho_1^2}(\omega_\alpha^2+\omega_\beta^2)}\times$$

$$\times e^{j[\omega_\alpha(\alpha-\alpha_0)+\omega_\beta(\beta-\beta_0)]}d\omega_\alpha\, d\omega_\beta.$$

Значение этого двойного интеграла соответствует следующему интегралу с переменными верхними пределами:

$$f_1(\alpha,\beta)=\int\limits_{-\infty}^{\alpha-\alpha_0}\int\limits_{-\infty}^{\beta-\beta_0}\frac{\rho_1^2}{\pi r_1^2}e^{-\rho_1^2\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{r_1^2}\right)}d\alpha\, d\beta,$$

следовательно,

$$f_1(\alpha,\beta)=\frac{1}{4}\left[1+\Phi_1\left(\frac{\alpha-\alpha_0}{r_1}\right)\right]\left[1+\Phi_1\left(\frac{\beta-\beta_0}{r_1}\right)\right]. \qquad (123)$$

Пример 2. Используем рассмотренный в предыдущем примере прием соответствий интегралов для определения формы выходного сигнала после прохождения сигнала колокольной формы

$$F_0(j\omega_\alpha, j\omega_\beta)=e^{-\frac{r_1^2}{4\rho_1^2}(\omega_\alpha^2+\omega_\beta^2)}$$

через прямоугольный фильтр с частотной характеристикой

$$W(j\omega_\alpha, j\omega_\beta)=\frac{4}{\omega_\alpha\omega_\beta}e^{-j(\omega_\alpha\alpha_0+\omega_\beta\beta_0)}\sin\omega_\alpha\frac{\alpha_1}{2}\sin\omega_\beta\frac{\beta_1}{2}.$$

Спектр выходного сигнала равен:

$$F_1(j\omega_\alpha, j\omega_\beta) = \frac{4}{\omega_\alpha\omega_\beta} e^{-\frac{r_1^2}{4\rho_1^2}(\omega_\alpha^2+\omega_\beta^2)} e^{-j(\omega_\alpha\alpha_0+\omega_\beta\beta_0)} \times$$

$$\times \sin\omega_\alpha\frac{\alpha_1}{2}\sin\omega_\beta\frac{\beta_1}{2}.$$

Заменяя синусы экспонентными функциями, можно представить форму выходного сигнала в виде суммы четырех интегралов:

$$f_1(\alpha,\beta) = \frac{1}{(2\pi^2)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{4}{\omega_\alpha\omega_\beta} e^{-\frac{r_1^2}{4\rho_1^2}(\omega_\alpha^2+\omega_\beta^2)} \times$$

$$\times e^{j\left[\omega_\alpha\left(\alpha-\alpha_0-\frac{\alpha_1}{2}\right)+\omega_\beta\left(\beta-\beta_0+\frac{\beta_1}{2}\right)\right]} d\omega_\alpha d\omega_\beta +$$

$$+\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\omega_\alpha\omega_\beta} e^{-\frac{r_1^2}{4\rho_1^2}(\omega_\alpha^2+\omega_\beta^2)} \times$$

$$\times e^{j\left[\omega_\alpha\left(\alpha-\alpha_0+\frac{\alpha_1}{2}\right)+\omega_\beta\left(\beta-\beta_0-\frac{\beta_1}{2}\right)\right]} d\omega_\alpha d\omega_\beta -$$

$$-\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\omega_\alpha\omega_\beta} e^{-\frac{r_1^2}{4\rho_1^2}(\omega_\alpha^2+\omega_\beta^2)} \times$$

$$\times e^{j\left[\omega_\alpha\left(\alpha-\alpha_0-\frac{\alpha_1}{2}\right)+\omega_\beta\left(\beta-\beta_0-\frac{\beta_1}{2}\right)\right]} d\omega_\alpha d\omega_\beta -$$

$$-\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\omega_\alpha\omega_\beta} e^{-\frac{r_1^2}{4\rho_1^2}(\omega_\alpha^2+\omega_\beta^2)} \times$$

$$\times e^{j\left[\omega_\alpha\left(\alpha-\alpha_0+\frac{\alpha_1}{2}\right)+\omega_\beta\left(\beta-\beta_0+\frac{\beta_1}{2}\right)\right]} d\omega_\alpha d\omega_\beta.$$

Эти интегралы можно заменить эквивалентными интегралами с переменными верхними пределами:

$$f_1(\alpha,\beta) = \int\limits_{-\infty}^{\alpha-\alpha_0-\frac{\alpha_1}{2}} \int\limits_{-\infty}^{\beta-\beta_0+\frac{\beta_1}{2}} \frac{\rho_1^2}{\pi r_1^2} e^{-\frac{\rho_1^2}{r_1^2}(\alpha^2+\beta^2)} \times$$

$$\times d\alpha\, d\beta + \int\limits_{-\infty}^{\alpha-\alpha_0+\frac{\alpha_1}{2}} \int\limits_{-\infty}^{\beta-\beta_0-\frac{\beta_1}{2}} \frac{\rho_1^2}{\pi r_1^2} e^{-\frac{\rho_1^2}{r_1^2}(\alpha^2+\beta^2)} d\alpha\, d\beta -$$

$$- \int\limits_{-\infty}^{\alpha-\alpha_0-\frac{\alpha_1}{2}} \int\limits_{-\infty}^{\beta-\beta_0-\frac{\beta_1}{2}} \frac{\rho_1^2}{\pi r_1^2} e^{-\frac{\rho_1^2}{r_1^2}(\alpha^2+\beta^2)} d\alpha\, d\beta -$$

$$- \int\limits_{-\infty}^{\alpha-\alpha_0+\frac{\alpha_1}{2}} \int\limits_{-\infty}^{\beta-\beta_0+\frac{\beta_1}{2}} \frac{\rho_1^2}{\pi r_1^2} e^{-\frac{\rho_1^2}{r_1^2}(\alpha^2+\beta^2)} d\alpha\, d\beta.$$

Полученные интегралы представляют собой приведенные функции Лапласа, поэтому

$$f_1(\alpha,\beta) = \frac{1}{4}\left\{\left[1+\Phi_1\left(\frac{\alpha-\alpha_0-\frac{\alpha_1}{2}}{r_1}\right)\right]\left[1+\Phi_1\left(\frac{\beta-\beta_0+\frac{\beta_1}{2}}{r_1}\right)\right]+\right.$$

$$+\left[1+\Phi_1\left(\frac{\alpha-\alpha_0+\frac{\alpha_1}{2}}{r_1}\right)\right]\left[1+\Phi_1\left(\frac{\beta-\beta_0-\frac{\beta_1}{2}}{r_1}\right)\right]-$$

$$-\left[1+\Phi_1\left(\frac{\alpha-\alpha_0-\frac{\alpha_1}{2}}{r_1}\right)\right]\left[1+\Phi_1\left(\frac{\beta-\beta_0-\frac{\beta_1}{2}}{r_1}\right)\right]-$$

$$\left.-\left[1+\Phi_1\left(\frac{\alpha-\alpha_0+\frac{\alpha_1}{2}}{r_1}\right)\right]\left[1+\Phi_1\left(\frac{\beta-\beta_0+\frac{\beta_1}{2}}{r_1}\right)\right]\right\}. \quad (124)$$

На рис. 27 изображена форма сигнала, описываемого выражением (124).

19. Преобразование двухмерных световых сигналов в сигналы, зависящие от времени

Чтобы преобразовать многомерный световой сигнал в сигнал, являющийся только функцией времени, необходимо чтобы входной

сигнал, весовая функция фильтра или же то и другое вместе являлись функциями времени.

Если входной сигнал

$$f_0 = f_0(\alpha, \beta, t)$$

и весовая функция фильтра

$$w = w(\alpha, \beta, t)$$

зависят от времени, то их частотные характеристики будут:

$$F_0 = F_0(j\omega_\alpha, j\omega_\beta, j\omega t);$$
$$W = W(j\omega_\alpha, j\omega_\beta, j\omega t).$$

Спектр выходного сигнала равен произведению

$$F_1(j\omega_\alpha, j\omega_\beta, j\omega t) = W(j\omega_\alpha, j\omega_\beta, j\omega t)\, F_0(j\omega_\alpha, j\omega_\beta, j\omega t).$$

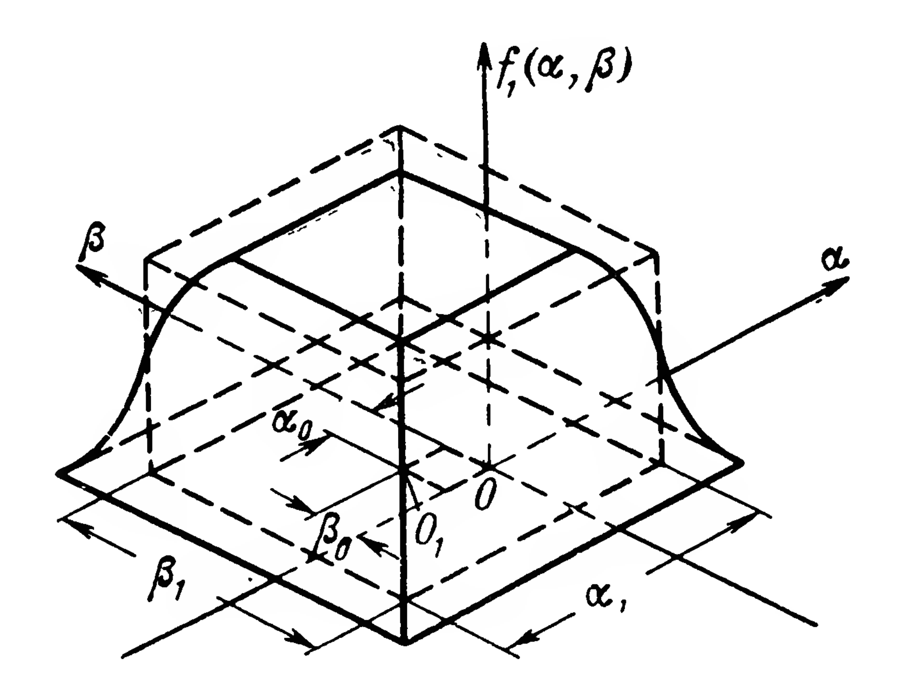


Рис. 27. Форма выходного сигнала.

Для нахождения временнóго спектра светового сигнала на выходе фильтра необходимо проинтегрировать многомерный спектр сигнала по обеим пространственным частотам:

$$F_1(j\omega t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(j\omega_\alpha, j\omega_\beta, j\omega t)\, d\omega_\alpha d\omega_\beta. \qquad (125)$$

Чтобы определить временнýю форму сигнала, следует воспользоваться обратным преобразованием Фурье

$$f_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(j\omega t)\, e^{j\omega_t t} d\omega_t.$$

Рассмотрим преобразование входного сигнала

$$f_0 = f_0(\vec{\rho})$$

фильтром с поступательно перемещающейся весовой функцией

$$w = w\,[\vec{\rho} + \vec{r}(t)].$$

Обозначая частотные характеристики их

$$F_0 = F_0(j\vec{\omega});$$

$$W = W(j\vec{\omega})\,e^{j\vec{\omega}\vec{r}(t)},$$

найдем выходной сигнал в следующем виде:

$$f_1(t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_0(j\vec{\omega})\,W(j\vec{\omega})\,e^{j\vec{\omega}\vec{r}(t)}\,d\vec{\omega}.$$

Если перемещение весовой функции происходит с постоянной скоростью вдоль одной из координат

$$\vec{r}(t) = (\dot{\alpha}_0 t,\ 0),$$

то выходной сигнал определяется интегралом

$$f_1(t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_0(j\omega_\alpha, j\omega_\beta)\,W(j\omega_\alpha, j\omega_\beta)\,e^{j\omega_\alpha\dot{\alpha}_0 t}\,d\omega_\alpha\,d\omega_\beta.$$

Но выходной сигнал может быть представлен также и в таком виде:

$$f_1(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_1(j\omega_t)\,e^{j\omega_t t}\,d\omega_t,$$

поэтому, полагая

$$\omega_t = \omega_\alpha\dot{\alpha}_0,$$

можно получить:

$$F_1(j\omega_t) = \frac{1}{2\pi\dot{\alpha}_0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_0\left(j\,\frac{\omega_t}{\dot{\alpha}_0}, j\omega_\beta\right) W\left(j\,\frac{\omega_t}{\dot{\alpha}_0}, j\omega_\beta\right) d\omega_\beta. \qquad (126)$$

Проиллюстрируем полученную формулу решением следующих примеров.

Пример 1. Пусть сигнал колокольной формы

$$F_0(j\omega_\alpha, j\omega_\beta) = e^{-\frac{r_1^2}{4\rho_1^2}(\omega_\alpha^2 + \omega_\beta^2)}$$

преобразуется фильтром с прямоугольной весовой функцией, перемещающейся с постоянной скоростью вдоль координатной оси 0α, с частотной характеристикой

$$W(j\omega_\alpha, j\omega_\beta, t) = e^{j\omega_\alpha\dot{\alpha}_0 t}\,\frac{4}{\omega_\alpha\omega_\beta}\sin\omega_\alpha\frac{\alpha_1}{2}\sin\omega_\beta\frac{\beta_1}{2}.$$

Временно́й спектр выходного сигнала определяется интегралом

$$F_1(j\omega t)=\frac{1}{2\pi\dot{\alpha}_0}e^{-\frac{r_1^2}{4\rho_1^2}\frac{\omega_t^2}{\dot{\alpha}_0^2}}\frac{2\dot{\alpha}_0}{\omega t}\sin\frac{\omega t\alpha_1}{2\dot{\alpha}_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2}{\omega_\beta}\times$$

$$\times e^{-\frac{r_1^2}{4\rho_1^2}\omega_\beta^2}\sin\omega_\beta\frac{\beta_1}{2}d\omega_\beta.$$

Интегрируя это выражение, имеем:

$$F_1(j\omega t)=\frac{2\beta_1\rho_1}{r_1\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{(-1)^k}{k!(2k+1)}\left(\frac{\beta_1\rho_1}{2r_1}\right)^{2k}\times$$

$$\times e^{-\frac{r_1^2\omega_t^2}{4\rho_1^2\dot{\alpha}_0^2}}\frac{\sin\frac{\alpha_1}{2\dot{\alpha}_0}\omega t}{\omega t}. \tag{127}$$

При вращении весовой функции фильтра его частотная характеристика равна:

$$W(j\vec{\omega},t)=W[jM_{\gamma(t)}\vec{\omega}],$$

поэтому временна́я форма сигнала на его входе будет:

$$f_1(t)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}F_0(j\vec{\omega})W[jM_{\gamma(t)}\vec{\omega}]\,d\omega. \tag{128}$$

Рассмотрим пример определения выходного сигнала при вращении весовой функции фильтра.

Пример 2. Пусть на вход сдвигающего звена подается сигнал прямоугольной формы, при этом весовая функция звена вращается с постоянной угловой скоростью. Частотная характеристика звена имеет следующий вид [см. формулу (114)]:

$$W(j\omega_\alpha,j\omega_\beta,t)=e^{j[(\alpha_0\omega_\alpha+\beta_0\omega_\beta)\cos\dot{\chi}t+(\beta_0\omega_\alpha-\alpha_0\omega_\beta)\sin\dot{\chi}t]},$$

поэтому временна́я форма выходного сигнала равняется:

$$f_1(t)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j[(\alpha_0\omega_\alpha+\beta_0\omega_\beta)\cos\dot{\chi}t+(\beta_0\omega_\alpha-\alpha_0\omega_\beta)\sin\dot{\chi}t]}\times$$

$$\times\frac{4}{\omega_\alpha\omega_\beta}\sin\omega_\alpha\frac{\alpha_1}{2}\sin\omega_\beta\frac{\beta_1}{2}d\omega_\alpha d\omega_\beta.$$

Разобьем этот интеграл на два сомножителя и заменим в каждом из них синусы экспоненциальными функциями, тогда эти сомножители могут быть представлены в виде

$$f_{11}(t)=\frac{1}{2\pi j}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\left[\omega_\alpha\left(\alpha_0\cos\dot\chi t+\beta_0\sin\dot\chi t+\frac{\alpha_1}{2}\right)\right]}\frac{d\omega_\alpha}{\omega_\alpha}-\right.$$

$$\left.-\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\left[\omega_\alpha\left(\alpha_0\cos\dot\chi t+\beta_0\sin\dot\chi t-\frac{\alpha_1}{2}\right)\right]}\frac{d\omega_\alpha}{\omega_\alpha}\right\},$$

$$f_{12}(t)=\frac{1}{2\pi j}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\left[\omega_\beta\left(\beta_0\cos\dot\chi t-\alpha_0\sin\dot\chi t+\frac{\beta_1}{2}\right)\right]}\frac{d\omega_\beta}{\omega_\beta}-\right.$$

$$\left.-\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\left[\omega_\beta\left(\beta_0\cos\dot\chi t-\alpha_0\sin\dot\chi t-\frac{\beta_1}{2}\right)\right]}\frac{d\omega_\beta}{\omega_\beta}\right\}.$$

Разности интегралов представляют собой разрывные функции, имеющие следующие аналитические выражения:

$$\psi_1(\alpha_0\cos\dot\chi t+\beta_0\sin\dot\chi t)=\begin{cases}0 \text{ при } \alpha_0\cos\dot\chi t+\beta_0\sin\dot\chi t<-\frac{\alpha_1}{2} \text{ и} \\ \qquad \alpha_0\cos\dot\chi t+\beta_0\sin\dot\chi t>\frac{\alpha_1}{2}, \\ 1 \text{ при } -\frac{\alpha_1}{2}<\alpha_0\cos\dot\chi t+\beta_0\sin\dot\chi t<-\frac{\alpha_1}{2};\end{cases}$$

$$\psi_2(\beta_0\cos\dot\chi t-\alpha_0\sin\dot\chi t)=\begin{cases}0 \text{ при } \beta_0\cos\dot\chi t-\alpha_0\sin\dot\chi t<-\frac{\beta_1}{2} \text{ и} \\ \qquad \beta_0\cos\dot\chi t-\alpha_0\sin\dot\chi t>\frac{\beta_1}{2}, \\ 1 \text{ при } -\frac{\beta_1}{2}<\beta_0\cos\dot\chi t-\alpha_0\sin\dot\chi t<\frac{\beta_1}{2}.\end{cases}$$

Выходной сигнал равен произведению

$$f_1(t)=\psi_1(\alpha_0\cos\dot\chi t+\beta_0\sin\dot\chi t)\,\psi_2(\beta_0\cos\dot\chi t-\alpha_0\sin\dot\chi t). \qquad (129)$$

Характер изменения сигнала во времени изображен на рис. 28. Из рассмотрения его следует, что

при $\alpha_0^2+\beta_0^2<\left(\frac{\beta_1}{2}\right)^2 \quad f_1(t)=1$,

а при $\alpha_0^2+\beta_0^2>\left(\frac{\alpha_1}{2}\right)^2+\left(\frac{\beta_1}{2}\right)^2 \quad f_1(t)=0$.

На выходе фильтра за один оборот весовой функции может быть два или четыре прямоугольных импульса.

Если происходит растяжение входного сигнала и весовой функции фильтра, то их характеристики будут:

$$F_0(j\vec{\omega}, t) = \frac{1}{|\det M_{Ft}|} F_0(jM_{Ft}^{-1}\vec{\omega});$$

$$W(j\vec{\omega}, t) = \frac{1}{|\det M_{Wt}|} W(jM_{Wt}^{-1}\vec{\omega}).$$

Выходной сигнал можно определить следующим образом:

$$f_1(t) = \frac{1}{(2\pi)^2 |\det M_{Ft} M_{Wt}|} \int_{-\infty}^{+\infty} F_0(jM_{Ft}^{-1}\vec{\omega}) W(jM_{Wt}^{-1}\vec{\omega}) d\vec{\omega}. \quad (130)$$

Пример 3. Рассмотрим преобразование сигнала колокольной формы фильтром с прямоугольной весовой функцией, которая подвергается равномерному растяжению. Частотная характеристика

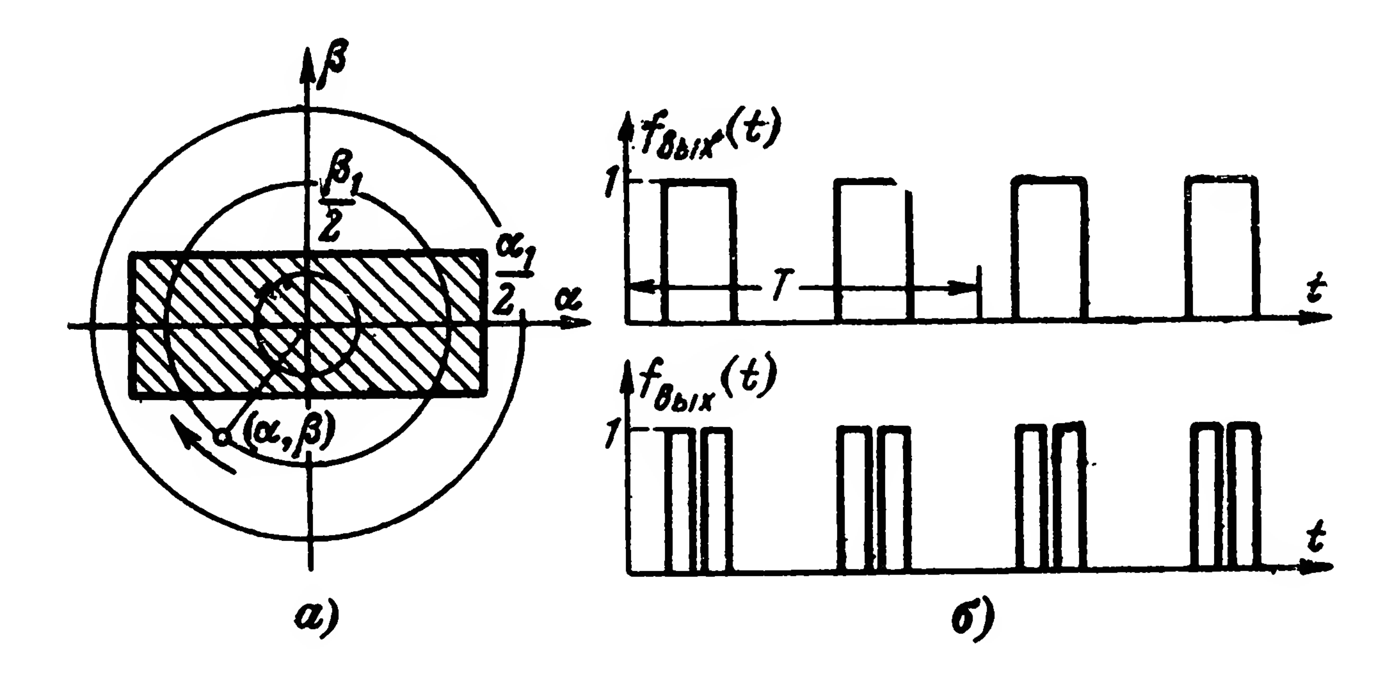


Рис. 28. Преобразование сигнала.
а — схема преобразования; *б* — эпюры сигналов.

фильтра определяется формулой (116), поэтому выходной сигнал равен:

$$f_1(t) = \frac{4}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{r_1^2}{4\rho_1^2}(\omega_\alpha^2 + \omega_\beta^2)} \frac{1}{\omega_\alpha \omega_\beta} \times$$

$$\times \sin \omega_\alpha \frac{\alpha_1}{2a_{11}t} \sin \omega_\beta \frac{\beta_1}{2a_{22}t} d\omega_\alpha d\omega_\beta.$$

Преобразуя этот интеграл по схеме, приведенной в § 18, получим:

$$f_1(t)=\frac{1}{4}\left\{\left[1-\Phi_1\left(\frac{\alpha_1}{2r_1a_{11}t}\right)\right]\left[1+\Phi_1\left(\frac{\beta_1}{2r_1a_{22}t}\right)\right]+\right.$$

$$+\left[1+\Phi_1\left(\frac{\alpha_1}{2r_1a_{11}t}\right)\right]\left[1-\Phi_1\left(\frac{\beta_1}{2r_1a_{22}t}\right)\right]-$$

$$-\left[1-\Phi_1\left(\frac{\alpha_1}{2r_1a_{11}t}\right)\right]\left[1-\Phi_1\left(\frac{\beta_1}{2r_1a_{22}t}\right)\right]-$$

$$\left.-\left[1+\Phi_1\left(\frac{\alpha_1}{2r_1a_{11}t}\right)\right]\left[1+\Phi_1\left(\frac{\beta_1}{2r_1a_{22}t}\right)\right]\right\}. \qquad (131)$$

Аналогичную форму имеет выходной сигнал при преобразовании прямоугольного светового сигнала, подвергающегося равномерному растяжению, фильтром с колокольной весовой функцией. Примером такого растяжения сигнала является увеличение или уменьшение угловых размеров источника сигнала при изменении расстояния от него до прибора.

20. Преобразование сигналов нестационарными фильтрами

Частотная характеристика нестационарного фильтра может являться функцией параметров α и β

$$W=W(j\omega_\alpha, j\omega_\beta, \alpha, \beta).$$

Причиной этого является изменение формы весовой функции при переходе от одной точки пространства к другой. Спектр выходного сигнала также будет функцией параметров α и β

$$F_1(j\omega_\alpha, j\omega_\beta, \alpha, \beta)=W(j\omega_\alpha, j\omega_\beta, \alpha, \beta)F_0(j\omega_\alpha, \omega_\beta).$$

Нестационарные многомерные фильтры являются аналогом одномерных систем с переменными параметрами, теория которых изложена в монографии А. В. Солодова [Л. 40].

Для нахождения пространственной формы выходного сигнала необходимо воспользоваться обратным преобразованием Фурье

$$f_1(\alpha, \beta)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F_0(j\omega_\alpha, j\omega_\beta)W(j\omega_\alpha, j\omega_\beta, \alpha, \beta)\times$$

$$\times e^{j(\omega_\alpha\alpha+\omega_\beta\beta)}\,d\omega_\alpha d\omega_\beta. \qquad (132)$$

Эта формула является обобщением приведенной ранее формулы (5). Необходимо отметить, что восстановление спектра $F_1(j\omega_\alpha, j\omega_\beta, \alpha, \beta)$ путем применения к функции $f_1(\alpha, \beta)$ прямого преобразования Фурье невозможно, так как получаемый при этом спектр $F'_1(j\omega_\alpha, j\omega_\beta)$ имеет другой физический смысл.

Для иллюстрации формулы (132) решим следующий пример.

Пример. Рассмотрим преобразование сигнала колокольной формы нестационарным фильтром, прямоугольная весовая функция которого определяется следующим образом:

$$w(\alpha, \mu, \beta, \nu) = \begin{cases} 1 \text{ при } -\frac{\alpha_1}{2}\cos\alpha < \mu < \frac{\alpha_1}{2}\cos\alpha \text{ и} \\ \qquad -\frac{\beta_1}{2}\cos\beta < \nu < \frac{\beta_1}{2}\cos\beta, \\ 0 \text{ при прочих значениях } \mu \text{ и } \nu. \end{cases}$$

На рис. 29 приведена рассматриваемая весовая функция. Она представляет собой прямоугольную диафрагму, которая может занимать различные положения относительно визирной оси прибора. При $\alpha=\beta=0$ угловые размеры весовой функции являются максимальными, а при $\alpha\longrightarrow\pi/2$ и $\beta\longrightarrow\pi/2$ угловые размеры ее стремятся к нулю.

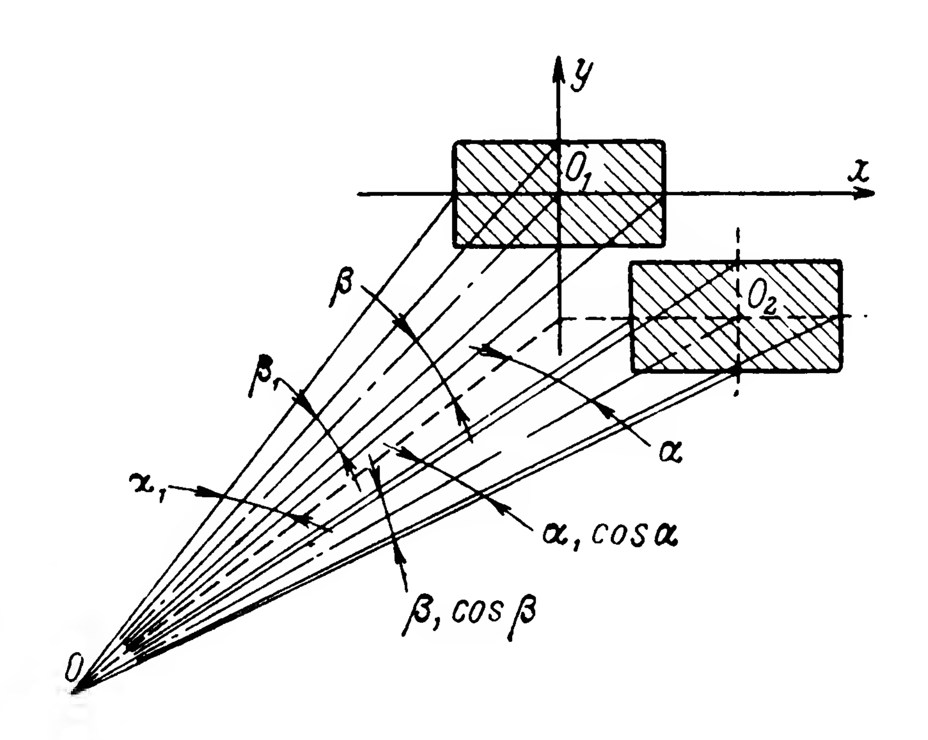


Рис. 29. Схема нестационарного фильтра.

Частотная характеристика фильтра определяется следующим интегралом:

$$W(j\omega_\alpha, j\omega_\beta, \alpha, \beta) = \int\limits_{-\frac{\alpha_1}{2}\cos\alpha}^{\frac{\alpha_1}{2}\cos\alpha} \int\limits_{-\frac{\beta_1}{2}\cos\beta}^{\frac{\beta_1}{2}\cos\beta} e^{-j(\omega_\alpha\mu+\omega_\beta\nu)}\, d\mu\, d\nu.$$

Вычисляя интеграл и преобразуя получившееся выражение, имеем:

$$W(j\omega_\alpha, j\omega_\beta, \alpha, \beta) = \frac{4}{\omega_\alpha\omega_\beta}\sin\left(\omega_\alpha\frac{\alpha_1}{2}\cos\alpha\right)\sin\left(\omega_\beta\frac{\beta_1}{2}\cos\beta\right).$$

Для нахождения пространственной формы выходного сигнала необходимо проинтегрировать выражение

$$f_1(\alpha, \beta) = \frac{4}{(2\pi)^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\omega_\alpha \omega_\beta} e^{-\frac{r_1^2}{4\rho_1^2}(\omega_\alpha^2 + \omega_\beta^2)} e^{j(\omega_\alpha \alpha + \omega_\beta \beta)} \times$$

$$\times \sin\left(\omega_\alpha \frac{\alpha_1}{2} \cos\alpha\right) \sin\left(\omega_\beta \frac{\beta_1}{2} \cos\beta\right) d\omega_\alpha \, d\omega_\beta.$$

По аналогии с формулой (124) получим форму выходного сигнала в следующем виде:

$$f_1(\alpha, \beta) = \frac{1}{4} \left\{ \left[1 + \Phi_1 \left(\frac{\alpha - \frac{\alpha_1}{2}\cos\alpha}{r_1} \right) \right] \times \right.$$

$$\times \left[1 + \Phi_1 \left(\frac{\beta + \frac{\beta_1}{2}\cos\beta}{r_1} \right) \right] +$$

$$+ \left[1 + \Phi_1 \left(\frac{\alpha + \frac{\alpha_1}{2}\cos\alpha}{r_1} \right) \right] \left[1 + \Phi_1 \left(\frac{\beta - \frac{\beta_1}{2}\cos\beta}{r_1} \right) \right] -$$

$$- \left[1 + \Phi_1 \left(\frac{\alpha - \frac{\alpha_1}{2}\cos\alpha}{r_1} \right) \right] \left[1 + \Phi_1 \left(\frac{\beta - \frac{\beta_1}{2}\cos\beta}{r_1} \right) \right] -$$

$$\left. - \left[1 + \Phi_1 \left(\frac{\alpha + \frac{\alpha_1}{2}\cos\alpha}{r_1} \right) \right] \left[1 + \Phi_1 \left(\frac{\beta + \frac{\beta_1}{2}\cos\beta}{r_1} \right) \right] \right\}. \qquad (133)$$

При малых углах α и β форма выходного сигнала незначительно отличается от формы сигнала, изображенного на рис. 27.

21. Преобразование случайных сигналов

Если на вход фильтра с весовой функцией $w(\alpha, \beta)$ подается случайный сигнал $x_0(\alpha, \beta)$, то связь между выходным и входным сигналами определяется интегралом Дюамеля

$$x_1(\alpha, \beta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x_0(\alpha - \xi, \beta - \zeta) w(\xi, \zeta) \, d\xi \, d\zeta.$$

Автокорреляционная функция выходного сигнала равна:

$$R_{x_1}(\mu, \nu) = \lim_{\substack{\alpha_1 \to \infty \\ \beta_1 \to \infty}} \frac{1}{4\alpha_1 \beta_1} \int\limits_{-\alpha_1}^{\alpha_1} \int\limits_{-\beta_1}^{\beta_1} x_1(\alpha, \beta) x_1(\alpha + \mu, \beta + \nu) \, d\alpha \, d\beta.$$

Подставляя сюда значение выходного сигнала из интеграла Дюамеля, получаем:

$$R_{x_1}(\mu, \nu) = \lim_{\substack{\alpha_1\to\infty \\ \beta_1\to\infty}} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi d\zeta \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} w(\eta, \vartheta)\, w(\xi, \zeta)\, d\eta d\vartheta \times$$

$$\times \left[\frac{1}{4\alpha_1\beta_1} \int_{-\alpha_1}^{\alpha_1}\int_{-\beta_1}^{\beta_1} x_0(\alpha+\mu-\eta, \beta+\nu-\vartheta)\, x_0(\alpha-\xi, \beta-\zeta) d\alpha\, d\beta\right].$$

Преобразуем последний двойной интеграл следующим образом:

$$\lim_{\substack{\alpha_1\to\infty \\ \beta_1\to\infty}} \frac{1}{4\alpha_1\beta_1} \int_{-\alpha_1}^{\alpha_1}\int_{-\beta_1}^{\beta_1} x_0(\alpha+\mu-\eta, \beta+\nu-\vartheta) \times$$

$$\times x_0(\alpha-\xi, \beta-\zeta)\, d\alpha\, d\beta = \lim_{\substack{\alpha_1\to\infty \\ \beta_1\to\infty}} \frac{1}{4\alpha_1\beta_1} \int_{-\alpha_1}^{\alpha_1}\int_{-\beta_1}^{\beta_1} x_0(\alpha+\mu+\xi-\eta,$$

$$\beta+\nu+\zeta-\vartheta)\, x_0(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta = R_{x_0}(\mu+\xi-\eta, \nu+\zeta-\vartheta).$$

Таким образом, связь между автокорреляционными функциями выходного и входного сигналов определяется формулой

$$R_{x_1}(\mu, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi d\zeta \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} w(\xi, \zeta)\, w(\eta, \vartheta)\, R_{x_0}(\mu+\xi-\eta, \nu+$$

$$+\zeta-\vartheta)\, d\eta\, d\vartheta. \qquad (134)$$

Найдем теперь зависимость между спектральными плотностями сигналов. Спектральная плотность выходного сигнала связана с автокорреляционной функцией преобразованием Фурье

$$S_{x_1}(\omega_\mu, \omega_\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} R_{x_1}(\mu, \nu)\, e^{-j(\omega_\mu \mu + \omega_\nu \nu)} d\mu\, d\nu.$$

Подставляя сюда значение автокорреляционной функции из формулы (134), имеем:

$$S_{x_1}(\omega_\mu, \omega_\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} d\mu\, d\nu \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi\, d\zeta \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j(\omega_\mu \mu + \omega_\nu \nu)}\, w(\eta, \vartheta)\, w(\xi, \zeta) \times$$

$$\times R_{x_0}(\mu+\xi-\eta, \nu+\zeta-\vartheta)\, d\eta\, d\vartheta.$$

Преобразуем подынтегральное выражение

$$S_{x_1}(\omega_\mu, \omega_\nu) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} w(\eta, \vartheta)\, e^{-j(\omega_\mu \eta + \omega_\nu \vartheta)} \times$$

$$\times d\eta\, d\vartheta \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} w(\xi, \zeta)\, e^{j(\omega_\mu \xi + \omega_\nu \zeta)}\, d\xi\, d\zeta \times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R_{x_0}(\mu + \xi - \eta, \nu + \zeta - \vartheta)\, e^{j[\omega_\mu(\mu+\xi-\eta) + \omega_\nu(\nu+\zeta-\vartheta)]}\, d\mu\, d\nu.$$

Заменяя двойные интегралы частотными характеристиками и спектральной плотностью, получаем:

$$S_{x_1}(\omega_\mu, \omega_\nu) = W(j\omega_\mu, j\omega_\nu)\, W(-j\omega_\mu, -j\omega_\nu)\, S_{x_0}(\omega_\mu, \omega_\nu)$$

или же

$$S_{x_1}(\omega_\mu, \omega_\nu) = |W(j\omega_\mu, j\omega_\nu)|^2\, S_{x_0}(\omega_\mu, \omega_\nu). \qquad (135)$$

Рассмотрим теперь более общий случай, когда на вход системы фильтров подается два случайных сигнала $x(\alpha, \beta)$ и $y(\alpha, \beta)$. Точки приложения случайных сигналов могут быть различными, поэтому частотные характеристики системы для каждого из сигналов будут также разными. Спектральная плотность выходного сигнала определяется следующей формулой:

$$S_z(\omega_\mu, \omega_\nu) = |W_x(j\omega_\mu, j\omega_\nu)|^2\, S_x(\omega_\mu, \omega_\nu) +$$
$$+ |W_y(j\omega_\mu, j\omega_\nu)|^2\, S_y(\omega_\mu, \omega_\nu) + W_x(-j\omega_\mu, -j\omega_\nu) \times$$
$$\times S_{xy}(\omega_\mu, \omega_\nu)\, W_y(j\omega_\mu, j\omega_\nu) + W_x(j\omega_\mu, j\omega_\nu) \times$$
$$\times S_{yx}(\omega_\mu, \omega_\nu)\, W_y(-j\omega_\mu, -j\omega_\nu), \qquad (136)$$

где $S_{xy}(\omega_\mu, \omega_\nu)$, $S_{yx}(\omega_\mu, \omega_\nu)$ — взаимные спектральные плотности сигналов.

Если сигналы $x(\alpha, \beta)$ и $y(\alpha, \beta)$ взаимонезависимы, то

$$S_{xy}(\omega_\mu, \omega_\nu) = S_{yx}(\omega_\mu, \omega_\nu) = 0,$$

поэтому формула (136) существенно упрощается.

Рассмотрим примеры вычисления характеристик случайных световых сигналов на выходе двухмерных фильтров.

Пример 1. Определим характеристики случайного светового сигнала на выходе фильтра с частотной характеристикой

$$W(j\omega_\mu, j\omega_\nu) = e^{-\frac{r_1^2}{4\rho_1^2}(\omega_\mu^2 + \omega_\nu^2)},$$

если автокорреляционная функция входного сигнала

$$R_{x_0}(\mu, \nu) = D_{x_0} e^{-(\alpha_\mu |\mu| + \alpha_\nu |\nu|)}.$$

Спектральная плотность входного сигнала равна:

$$S_{x_0}(\omega_\mu, \omega_\nu) = \frac{4D_{x_0}}{\alpha_\mu \alpha_\nu \left(1 + \frac{\omega_\mu^2}{\alpha_\mu^2}\right)\left(1 + \frac{\omega_\nu^2}{\alpha_\nu^2}\right)},$$

поэтому для выходного сигнала она определяется формулой

$$S_{x_1}(\omega_\mu, \omega_\nu) = \frac{4D_{x_0}}{\alpha_\mu \alpha_\nu \left(1 + \frac{\omega_\mu^2}{\alpha_\mu^2}\right)\left(1 + \frac{\omega_\nu^2}{\alpha_\nu^2}\right)} \times$$

$$\times e^{-\frac{r_1^2}{2\rho_1^2}(\omega_\mu^2 + \omega_\nu^2)}.$$

Для нахождения автокорреляционной функции выходного сигнала необходимо вычислить интеграл

$$R_{x_1}(\mu, \nu) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \times$$

$$\times \frac{4D_{x_0} e^{-\frac{r_1^2}{2\rho_1^2}(\omega_\mu^2 + \omega_\nu^2)} e^{j(\omega_\mu \mu + \omega_\nu \nu)}}{\alpha_\mu \alpha_\nu \left(1 + \frac{\omega_\mu^2}{\alpha_\mu^2}\right)\left(1 + \frac{\omega_\nu^2}{\alpha_\nu^2}\right)} d\omega_\mu d\omega_\nu.$$

Разделяя интегралы, получаем:

$$R_{x_1}(\mu, \nu) = \frac{4D_{x_0}}{(2\pi)^2 \alpha_\mu \alpha_\nu} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{r_1^2}{2\rho_1^2}\omega_\mu^2} e^{j\omega_\mu \mu}}{1 + \frac{\omega_\mu^2}{\alpha_\mu^2}} \times$$

$$\times d\omega_\mu \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{r_1^2}{2\rho_1^2}\omega_\nu^2} e^{j\omega_\nu \nu}}{1 + \frac{\omega_\nu^2}{\alpha_\nu^2}} d\omega_\nu. \quad (137)$$

Рассмотрим функцию

$$f_{\mu}(z)=\frac{e^{-\frac{r_1^2}{2\rho_1^2}z^2}\,e^{jz\mu}}{1+\frac{z^2}{\alpha_{\mu}^2}}.$$

Она является аналитической и имеет особую точку — простой полюс в точке $z=j\alpha_{\mu}$. Вычет функции в этой точке равен:

$$\operatorname{res}_{j\alpha_{\mu}} f_{\mu}(z)=\left.\frac{e^{-\frac{r_1^2}{2\rho_1^2}z^2}\,e^{jz\mu}}{2z\frac{1}{\alpha_{\mu}^2}}\right|_{z=j\alpha_{\mu}}=\frac{1}{2j\frac{1}{\alpha_{\mu}}}\,e^{-\frac{r_1^2}{2\rho_1^2}\alpha_{\mu}^2}\,e^{-\alpha_{\mu}|\mu|}.$$

Интеграл от рассматриваемой функции равен:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mu}(z)\,dz=2\pi j\operatorname{res}_{j\alpha_{\mu}} f_{\mu}(z),$$

поэтому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mu}(z)\,dz=\pi\alpha_{\mu}\,e^{\frac{r_1^2}{2\rho_1^2}\alpha_{\mu}^2}\,e^{-\alpha_{\mu}|\mu|}.$$

Если рассмотреть теперь другую функцию

$$f_{\nu}(z)=\frac{e^{-\frac{r_1^2}{2\rho_1^2}z^2}\,e^{jz\nu}}{1+\frac{z^2}{\alpha_{\nu}^2}},$$

то интеграл от нее будет:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\nu}(z)\,dz=\pi\alpha_{\nu}e^{\frac{r_1^2}{2\rho_1^2}\alpha_{\nu}^2}\,e^{-\alpha_{\nu}|\nu|}.$$

Подставляя значения интегралов в формулу (137), получаем:

$$R_{x_1}(\mu,\nu)=D_{x_0}e^{\frac{r_1^2}{2\rho_1^2}(\alpha_{\mu}^2+\alpha_{\nu}^2)}\,e^{-(\alpha_{\mu}|\mu|+\alpha_{\nu}|\nu|)}. \qquad (138)$$

Полагая в этой формуле $\mu=\nu=0$, найдем дисперсию выходного сигнала

$$D_{x_1}=D_{x_0}e^{\frac{r_1^2}{2\rho_1^2}(\alpha_\mu^2+\alpha_\nu^2)}. \qquad (139)$$

Пример 2. Найдем характеристики выходного сигнала при прохождении светового сигнала, обладающего спектральной плотностью

$$S_{x_0}(\omega_\mu,\ \omega_\nu)=\frac{4D_{x_0}\alpha_\mu\alpha_\nu}{(\alpha_\mu^2+\omega_\mu^2)(\alpha_\nu^2+\omega_\nu^2)},$$

через фильтр с прямоугольной весовой функцией и частотной характеристикой

$$W(j\omega_\mu,\ j\omega_\nu)=\frac{4}{\omega_\mu\omega_\nu}\sin\omega_\mu\frac{\alpha_1}{2}\sin\omega_\nu\frac{\beta_1}{2}.$$

Спектральная плотность выходного светового сигнала определяется выражением

$$S_{x_1}(\omega_\mu,\ \omega_\nu)=\frac{64D_{x_0}\alpha_\mu\alpha_\nu\sin^2\omega_\mu\frac{\alpha_1}{2}\sin^2\omega_\nu\frac{\beta_1}{2}}{\omega_\mu^2\omega_\nu^2(\alpha_\mu^2+\omega_\mu^2)(\alpha_\nu^2+\omega_\nu^2)}. \qquad (140)$$

Чтобы найти дисперсию выходного сигнала, необходимо проинтегрировать спектральную плотность

$$D_{x_1}=\frac{64D_{x_0}\alpha_\mu\alpha_\nu}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2\omega_\mu\frac{\alpha_1}{2}\sin^2\omega_\nu\frac{\beta_1}{2}}{\omega_\mu^2\omega_\nu^2(\alpha_\mu^2+\omega_\mu^2)(\alpha_\nu^2+\omega_\nu^2)}d\omega_\mu d\omega_\nu.$$

Вычисляя этот интеграл, имеем:

$$D_{x_1}=4D_{x_0}\left[\alpha_1-\frac{1}{\alpha_\mu}\left(1-e^{-\alpha_1\alpha_\mu}\right)\right]\left[\beta_1-\frac{1}{\alpha_\nu}\left(1-e^{-\beta_1\alpha_\nu}\right)\right]. \qquad (141)$$

Пользуясь формулами (139) и (141), можно решить и более сложную задачу: определить дисперсию рассмотренного случайного сигнала при последовательном прохождении его сначала через фильтр с колокольной весовой функцией, а затем — с прямоугольной весовой функцией. Дисперсия выходного сигнала при этом будет:

$$D_{x_2}=4D_{x_0}e^{\frac{r_1^2}{2\rho_1^2}(\alpha_\mu^2+\alpha_\nu^2)}\left[\alpha_1-\frac{1}{\alpha_\mu}\left(1-e^{-\alpha_1\alpha_\mu}\right)\right]\times$$
$$\times\left[\beta_1-\frac{1}{\alpha_\nu}\left(1-e^{-\beta_1\alpha_\nu}\right)\right]. \qquad (142)$$

Эта задача встречается при определении характеристик случайного светового сигнала на выходе объектива и стоящей за ним прямоугольной диафрагмы.

Пример 3. Определим дисперсии выходных сигналов после прохождения пространственного белого шума через фильтры с колокольной весовой функцией и с прямоугольной весовой функцией.

Так как спектральная плотность белого шума постоянна

$$S_{x_0}(\omega_\mu, \omega_\nu) = D_{x_0},$$

то после прохождения сигнала через фильтр с колокольной весовой функцией спектральная плотность сигнала будет:

$$S_{x_1}(\omega_\mu, \omega_\nu) = D_{x_0} e^{-\frac{r_1^2}{2\rho_1^2}(\omega_\mu^2 + \omega_\nu^2)}.$$

Автокорреляционная функция его равна:

$$R_{x_1}(\mu, \nu) = \frac{D_{x_0}\rho_1^2}{2\pi r_1^2} e^{-\frac{\rho_1^2}{2r_1^2}(\mu^2+\nu^2)}.$$

Полагая здесь $\mu = \nu = 0$, находим:

$$D_{x_1} = D_{x_0}\frac{\rho_1^2}{2\pi r_1^2}. \tag{143}$$

Если же белый шум преобразуется фильтром с прямоугольной весовой функцией, то его спектральная плотность определяется формулой

$$S_{x_2}(\omega_\mu, \omega_\nu) = 16D_{x_0}\frac{\sin^2\omega_\mu\frac{\alpha_1}{2}\sin^2\omega_\nu\frac{\beta_1}{2}}{\omega_\mu^2\omega_\nu^2}.$$

Интегрируя это выражение, найдем дисперсию выходного сигнала

$$D_{x_2} = \frac{16D_{x_0}}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\omega_\mu^2\omega_\nu^2}\sin^2\omega_\mu\frac{\alpha_1}{2}\sin^2\omega_\nu\frac{\beta_1}{2}\,d\omega_\mu\,d\omega_\nu.$$

Вычисляя интеграл, получаем:

$$D_{x_2} = D_{x_0}\alpha_1\beta_1. \tag{144}$$

Отсюда следует, что дисперсия выходного сигнала пропорциональна площади прямоугольника.

22. Оптимальная фильтрация двухмерных световых сигналов

Задача оптимальной фильтрации заключается в том, чтобы найти характеристики фильтра, обеспечивающего желательное соотношение между полезным выходным сигналом и помехой. Широкое распространение получил метод синтеза оптимальных фильтров по критерию минимума средней квадратической ошибки воспроизведения полезного сигнала. Наиболее полное изложение этого метода приведено в книге Н. И. Андреева [Л. 2]. Сущность его заключается в следующем.

Пусть на вход некоторого двухмерного фильтра подается случайный полезный сигнал $m(\alpha, \beta)$ и помеха $n(\alpha, \beta)$, при этом $\varphi(\alpha, \beta)=m(\alpha, \beta)+n(\alpha, \beta)$; необходимо найти весовую функцию $w(\alpha, \beta)$, которая обеспечивает минимальную среднюю квадратическую ошибку между требуемым $g(\alpha, \beta)$ и возможным значением суммарного выходного сигнала $x(\alpha, \beta)$:

$$\overline{\varepsilon^2} = \lim_{\substack{T_\alpha \to \infty \\ T_\beta \to \infty}} \frac{1}{4T_\alpha T_\beta} \int_{-T_\alpha}^{T_\alpha} \int_{-T_\beta}^{T_\beta} [g(\alpha, \beta) - x(\alpha, \beta)]^2 \, d\alpha \, d\beta. \qquad (145)$$

Выходной сигнал определяется интегралом Дюамеля

$$x(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\alpha-\mu, \beta-\nu)\, w(\mu, \nu)\, d\mu\, d\nu,$$

следовательно,

$$\overline{\varepsilon^2} = \lim_{\substack{T_\alpha \to \infty \\ T_\beta \to \infty}} \int_{-T_\alpha}^{T_\alpha} \int_{-T_\beta}^{T_\beta} [g(\alpha, \beta) -$$

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\alpha-\mu, \beta-\nu)\, w(\mu, \nu)\, d\mu\, d\nu]^2 \, d\alpha\, d\beta.$$

Раскрыв скобки и произведя некоторые преобразования, получим:

$$\overline{\varepsilon^2} = \lim_{\substack{T_\alpha \to \infty \\ T_\beta \to \infty}} \frac{1}{4T_\alpha T_\beta} \int_{-T_\alpha}^{T_\alpha} \int_{-T_\beta}^{T_\beta} g^2(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta -$$

$$-2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} w(\mu, \nu)\, d\mu\, d\nu \lim_{\substack{T_\alpha \to \infty \\ T_\beta \to \infty}} \frac{1}{4T_\alpha T_\beta} \times$$

$$\times \int_{-T_\alpha}^{T_\alpha} \int_{-T_\beta}^{T_\beta} g(\alpha, \beta)\, \varphi(\alpha-\mu, \beta-\nu)\, d\alpha\, d\beta +$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} w(\mu, \nu)\, d\mu\, d\nu \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} w(\xi, \zeta)\, d\xi\, d\zeta \times$$

$$\times \lim_{\substack{T_\alpha\to\infty,\\ T_\beta\to\infty}} \frac{1}{4T_\alpha T_\beta} \int\limits_{-T_\alpha}^{T_\alpha}\int\limits_{-T_\beta}^{T_\beta} \varphi(\alpha-\mu, \beta-\nu)\, \varphi(\alpha-\xi, \beta-\zeta)\, d\alpha\, d\beta.$$

Пределы от двойных интегралов представляют собой корреляционные функции соответствующих случайных сигналов

$$R_g(\mu, \nu) = \lim_{\substack{T_\alpha\to\infty\\ T_\beta\to\infty}} \frac{1}{4T_\alpha T_\beta} \int\limits_{-T_\alpha}^{T_\alpha}\int\limits_{-T_\beta}^{T_\beta} g(\alpha+\mu, \beta+\nu)\, g(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta;$$

$$R_\varphi(\mu, \nu) = \lim_{\substack{T_\alpha\to\infty\\ T_\beta\to\infty}} \frac{1}{4T_\alpha T_\beta} \int\limits_{-T_\alpha}^{T_\alpha}\int\limits_{-T_\beta}^{T_\beta} \varphi(\alpha+\mu, \beta+\nu)\, \varphi(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta;$$

$$R_{g\varphi}(\mu, \nu) = \lim_{\substack{T_\alpha\to\infty\\ T_\beta\to\infty}} \frac{1}{4T_\alpha T_\beta} \int\limits_{-T_\alpha}^{T_\alpha}\int\limits_{-T_\beta}^{T_\beta} g(\alpha+\mu, \beta+\nu)\, \varphi(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta,$$

поэтому средняя квадратическая ошибка будет равна:

$$\overline{\varepsilon^2} = R_g(0, 0) - 2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} w(\mu, \nu) \times$$

$$\times R_{g\varphi}(\mu, \nu)\, d\mu\, d\nu + \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} w(\mu, \nu) \times$$

$$\times d\mu\, d\nu \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} w(\xi, \zeta)\, R_\varphi(\mu-\xi, \nu-\zeta)\, d\xi\, d\zeta. \qquad (146)$$

Для двухмерных фильтров светового сигнала условие физической осуществимости не является столь жестким, как для одномерных фильтров. Весовая функция $w(\xi, \zeta)$ фильтра может быть отличной от нуля не только при положительных, но и при отрицательных значениях аргументов ξ и ζ. Необходимое и достаточное условие минимума средней квадратической ошибки заключается в том, чтобы весовая функция фильтра $w(\xi, \zeta)$ представляла собой решение интегрального уравнения [Л. 41]

$$R_{g\varphi}(\mu, \nu) - \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R_\varphi(\mu-\xi, \nu-\zeta)\, w(\xi, \zeta)\, d\xi\, d\zeta = 0. \qquad (147)$$

Найдем частотную характеристику оптимального фильтра, для чего возьмем от обеих половин уравнения интегралы Фурье

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} R_{g\varphi}(\mu, \nu)\, e^{-j(\omega_\alpha \mu+\omega_\beta \nu)}\, d\mu\, d\nu =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j(\omega_\alpha \mu+\omega_\beta \nu)}\, d\mu\, d\nu \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} R_\varphi(\mu-\xi, \nu-\zeta)\, w(\xi, \zeta)\, d\xi\, d\zeta.$$

Вводя обозначения

$$\eta=\mu-\xi;$$
$$\vartheta=\nu-\zeta$$

и преобразуя интегральное уравнение, имеем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} R_{g\varphi}(\mu, \nu)\, e^{-j(\omega_\alpha \mu+\omega_\beta \nu)}\, d\mu\, d\nu =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} w(\xi, \zeta)\, e^{-j(\omega_\alpha \xi+\omega_\beta \zeta)}\, d\xi\, d\zeta \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} R_\varphi(\eta, \vartheta)\, e^{-j(\omega_\alpha \eta+\omega_\beta \vartheta)}\, d\eta\, d\vartheta.$$

Заменяя интегралы их значениями, получаем:

$$S_{g\varphi}(\omega_\alpha, \omega_\beta) = W(j\omega_\alpha, j\omega_\beta)\, S_\varphi(\omega_\alpha, \omega_\beta),$$

откуда находим частотную характеристику оптимального фильтра

$$W(j\omega_\alpha, j\omega_\beta) = \frac{S_{g\varphi}(\omega_\alpha, \omega_\beta)}{S_\varphi(\omega_\alpha, \omega_\beta)}. \qquad (148)$$

Минимальная средняя квадратическая ошибка при этом будет определяться следующей формулой:

$$\bar{\varepsilon}^2_{мин} = R_g(0, 0) - \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |W(j\omega_\alpha, j\omega_\beta)|^2\, S_\varphi(\omega_\alpha, \omega_\beta)\, d\omega_\alpha\, d\omega_\beta.$$

Внося дисперсию под знак интеграла, имеем:

$$\bar{\varepsilon}^2_{мин} = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \{S_g(\omega_\alpha, \omega_\beta) -$$

$$- |W(j\omega_\alpha, j\omega_\beta|^2\, S_\varphi(\omega_\alpha, \omega_\beta)\}\, d\omega_\alpha\, d\omega_\beta. \qquad (149)$$

Рассмотрим два частных случая нахождения частотных характеристик оптимальных фильтров.

Статистическое смещение

Пусть на вход некоторого фильтра подается только случайный полезный сигнал $m(\alpha, \beta)$. Найдем частотную характеристику фильтра из условия, чтобы средняя квадратическая ошибка

$$\overline{\varepsilon^2} = \lim_{\substack{T_\alpha \to \infty \\ T_\beta \to \infty}} \frac{1}{4T_\alpha T_\beta} \int_{-T_\alpha}^{T_\alpha} \int_{-T_\beta}^{T_\beta} [m(\alpha + \alpha_0, \beta + \beta_0) - x(\alpha, \beta)]^2 \, d\alpha \, d\beta$$

между выходным сигналом $x(\alpha, \beta)$ в любой точке (α, β) пространства и входным $m(\alpha+\alpha_0, \beta+\beta_0)$ в точке $(\alpha+\alpha_0, \beta+\beta_0)$ имела минимальное значение.

Так как в рассматриваемом случае

$$g(\alpha, \beta) = m(\alpha+\alpha_0, \beta+\beta_0);$$

$$\varphi(\alpha, \beta) = m(\alpha, \beta),$$

то взаимная корреляционная функция их будет равна:

$$R_{g\varphi}(\mu, \nu) \lim_{\substack{T_\alpha \to \infty \\ T_\beta \to \infty}} \frac{1}{4T_\alpha T_\beta} \int_{-T_\alpha}^{T_\alpha} \int_{-T_\beta}^{T_\beta} m(\mu + \alpha_0 + \alpha, \nu + \beta_0 + \beta)\, m(\alpha, \beta) \, d\alpha \, d\beta$$

откуда

$$R_{g\varphi}(\mu, \nu) = R_m(\mu + \alpha_0, \nu + \beta_0).$$

Взаимная спектральная плотность сигналов равна:

$$S_{g\varphi}(\omega_\alpha, \omega_\beta) = e^{j(\omega_\alpha \alpha_0 + \omega_\beta \beta_0)} S_m(\omega_\alpha, \omega_\beta).$$

Учитывая, что

$$S_\varphi(\omega_\alpha, \omega_\beta) = S_m(\omega_\alpha, \omega_\beta),$$

находим частотную характеристику оптимального фильтра

$$W(j\omega_\alpha, j\omega_\beta) = e^{j(\omega_\alpha \alpha_0 + \omega_\beta \beta_0)}. \tag{150}$$

Таким образом, в рассматриваемом случае оптимальным фильтром является сдвигающее звено.

Фильтрация

Рассмотрим случай, когда на вход фильтра подается полезный сигнал $m(\alpha, \beta)$ и помеха $n(\alpha, \beta)$. Предъявим к оптимальному фильтру требование, чтобы он воспроизводил на выходе с минимальной средней квадратической ошибкой полезный сигнал $m(\alpha, \beta)$.

В этом случае

$$g(\alpha, \beta) = m(\alpha, \beta),$$

поэтому

$$S_\varphi(\omega_\alpha, \omega_\beta) = S_m(\omega_\alpha, \omega_\beta) + S_n(\omega_\alpha, \omega_\beta) + $$
$$+ S_{mn}(\omega_\alpha, \omega_\beta) + S_{nm}(\omega_\alpha, \omega_\beta);$$
$$S_{g\varphi}(\omega_\alpha, \omega_\beta) = S_{m\varphi}(\omega_\alpha, \omega_\beta) = S_m(\omega_\alpha, \omega_\beta) + S_{nm}(\omega_\alpha, \omega_\beta).$$

Если полезный случайный сигнал $m(\alpha, \beta)$ и помеха $n(\alpha, \beta)$ независимы, то

$$S_\varphi(\omega_\alpha, \omega_\beta) = S_m(\omega_\alpha, \omega_\beta) + S_n(\omega_\alpha, \omega_\beta);$$
$$S_{g\varphi}(\omega_\alpha, \omega_\beta) = S_m(\omega_\alpha, \omega_\beta),$$

следовательно, частотная характеристика оптимального фильтра

$$W(j\omega_\alpha, j\omega_\beta) = \frac{S_m(\omega_\alpha, \omega_\beta)}{S_m(\omega_\alpha, \omega_\beta) + S_n(\omega_\alpha \omega_\beta)}. \tag{151}$$

Проиллюстрируем полученную формулу решением нескольких примеров.

Пример 1. Определим характеристики оптимального фильтра, если на вход его подаются пространственный белый шум

$$S_n(\omega_\alpha, \omega_\beta) = D_n$$

и полезный сигнал, спектральная плотность которого

$$S_m(\omega_\alpha, \omega_\beta) = D_m e^{-\frac{r_1^2}{4\rho_1^2}(\omega_\alpha^2 + \omega_\beta^2)}.$$

Частотная характеристика оптимального фильтра имеет вид:

$$W(j\omega_\alpha, j\omega_\beta) = \frac{1}{1 + \frac{D_n}{D_m} e^{\frac{r_1^2}{4\rho_1^2}(\omega_\alpha^2 + \omega_\beta^2)}}. \tag{152}$$

При $D_m/D_n \gg 1$ $W(j\omega_\alpha, j\omega_\beta) \approx 1$, а если же $D_n/D_m \gg 1$, то

$$W(j\omega_\alpha, j\omega_\beta) \approx \frac{D_m}{D_n} e^{-\frac{r_1^2}{4\rho_1^2}(\omega_\alpha^2 + \omega_\beta^2)}.$$

Следовательно, при $D_m/D_n \to 0$ $W(j\omega_\alpha, j\omega_\beta) \to 0$.

Пример 2. Найдем частотную характеристику оптимального фильтра, на вход которого подаются полезный сигнал и помеха,

спектральные плотности которых имеют одинаковую форму

$$S_m(\omega_\alpha, \omega_\beta) = \frac{4D_m a_m b_m}{\left(\omega_\alpha^2 + a_m^2\right)\left(\omega_\beta^2 + b_m^2\right)};$$

$$S_n(\omega_\alpha, \omega_\beta) = \frac{4D_n a_n b_n}{\left(\omega_\alpha^2 + a_n^2\right)\left(\omega_\beta^2 + b_n^2\right)}.$$

Используя формулу (151), получим:

$$W(j\omega_\alpha, j\omega_\beta) = \frac{1}{1 + \dfrac{D_n a_n b_n \left(\omega_\alpha^2 + a_m^2\right)\left(\omega_\beta^2 + b_m^2\right)}{D_m a_m b_m \left(\omega_\alpha^2 + a_n^2\right)\left(\omega_\beta^2 + b_n^2\right)}}. \quad (153)$$

Из полученного выражения следует, что в случае большой амплитуды полезного сигнала

$$\frac{D_m}{D_n} \gg 1$$

частотная характеристика фильтра

$$W(j\omega_\alpha, j\omega_\beta) \approx 1.$$

Если же амплитуда помехи значительно больше полезного сигнала

$$\frac{D_n}{D_m} \gg 1,$$

то частотная характеристика оптимального фильтра будет:

$$W(j\omega_\alpha, j\omega_\beta) \approx \frac{D_m a_m b_m \left(\omega_\alpha^2 + a_n^2\right)\left(\omega_\beta^2 + b_n^2\right)}{D_n a_n b_n \left(\omega_\alpha^2 + a_m^2\right)\left(\omega_\beta^2 + b_m^2\right)}.$$

Анализ соотношений между спектрами полезных сигналов и помех показывает, что возможны три случая фильтрации:

спектры сигнала и помехи не перекрываются;

спектры сигнала и помехи перекрываются частично;

спектр сигнала полностью перекрывается спектром помехи.

Все эти случаи иллюстрируются рис. 30.

В первом случае частотная характеристика оптимального фильтра на участке спектра полезного сигнала равняется единице, а на остальной части плоскости равна нулю. Ошибка фильтрации сигнала при этом равняется нулю, так как помеха полностью подавляется фильтром.

При частичном перекрывании спектра сигнала и помехи частотная характеристика оптимального фильтра равняется единице только на том участке, где спектры не перекрываются. На границе спектра полезного сигнала частотная характеристика фильтра становится равной нулю.

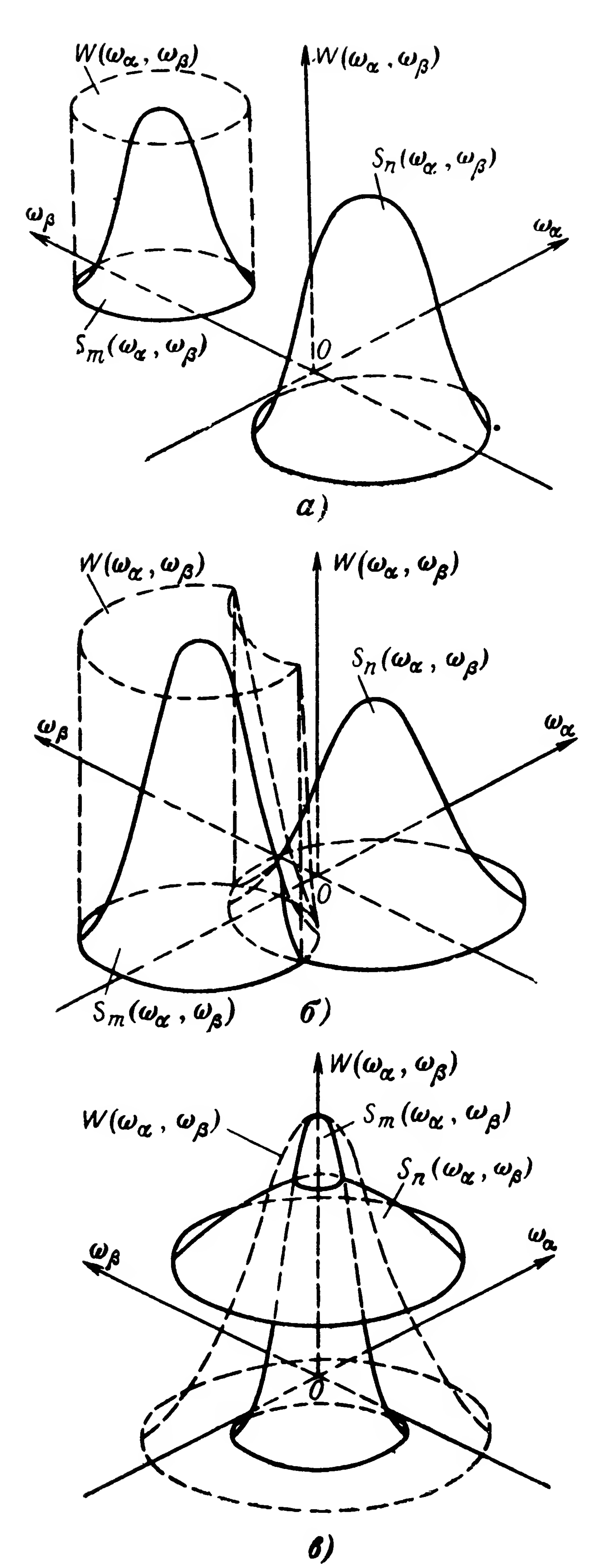


Рис. 30. Схемы оптимальной фильтрации сигналов.

а — с неперекрывающимися спектрами; *б* — с частично перекрывающимися спектрами; *в* — с полностью перекрывающимися спектрами.

Если спектр полезного сигнала полностью перекрывается спектром помехи, то возможность выделения сигнала на выходе фильтра определяется интенсивностью помехи. Если интенсивность помехи ниже интенсивности сигнала, то при использовании оптимального фильтра отношение сигнал/помеха на его выходе больше единицы.

Глава пятая

ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СЛЕДЯЩИХ СИСТЕМ С ОПТИЧЕСКИМИ СВЯЗЯМИ

23. Приемники излучения

Приемники излучения служат для преобразования световых сигналов в электрические. В зависимости от физических явлений, происходящих в приемниках при преобразовании сигналов, они делятся на три группы: с внешним фотоэффектом (вакуумные фотоэлементы, газонаполненные фотоэлементы и фотоумножители); с внутренним фотоэффектом (фоторезисторы); вентильные (фотодиоды, фототриоды).

Фототок, протекающий через приемник излучения, зависит от нескольких переменных

$$i=i(\lambda,\ \Phi,\ u_{п},\ \omega_t),$$

где λ — длина волны излучения;

Φ — падающий на приемник световой поток;

$u_{п}$ — напряжение питания на электродах приемника;

ω_t — частота модуляции светового потока.

При анализе свойств приемников излучения рассматривается влияние каждой из переменных в отдельности на величину фототока, причем все остальные принимаются постоянными. Каждая из этих зависимостей определяет одну из основных характеристик приемников: спектральную, световую, вольт-амперную, частотную.

Фотоэлектрические приемники излучения являются селективными преобразователями светового сигнала. Спектральной чувствительностью приемника называют меру его реакции на единицу падающего монохроматического излучения. Часто пользуются относительной спектральной чувствительностью

$$k_0(\lambda)=\frac{k(\lambda)}{k(\lambda_m)},$$

где $k(\lambda_m)$ — максимальное значение спектральной чувствительности приемника.

На рис. 31 приведены относительные спектральные чувствительности наиболее распространенных приемников излучения. Сравнение приведенных на рисунке графиков позволяет сделать вывод, что приемники излучения, действие которых основано на внутреннем фотоэффекте, обладают спектральной чувствительностью к длинноволновому излучению. Приемники, в которых используется внешний фотоэффект, реагируют главным образом на излучение видимого участка спектра.

Световые характеристики приемников излучения являются нелинейными. Наиболее ярко выражена нелинейность световой характеристики для фоторезисторов. При сравнительной оценке приемников излучения часто пользуются не световой характеристикой, а интегральной чувствительностью.

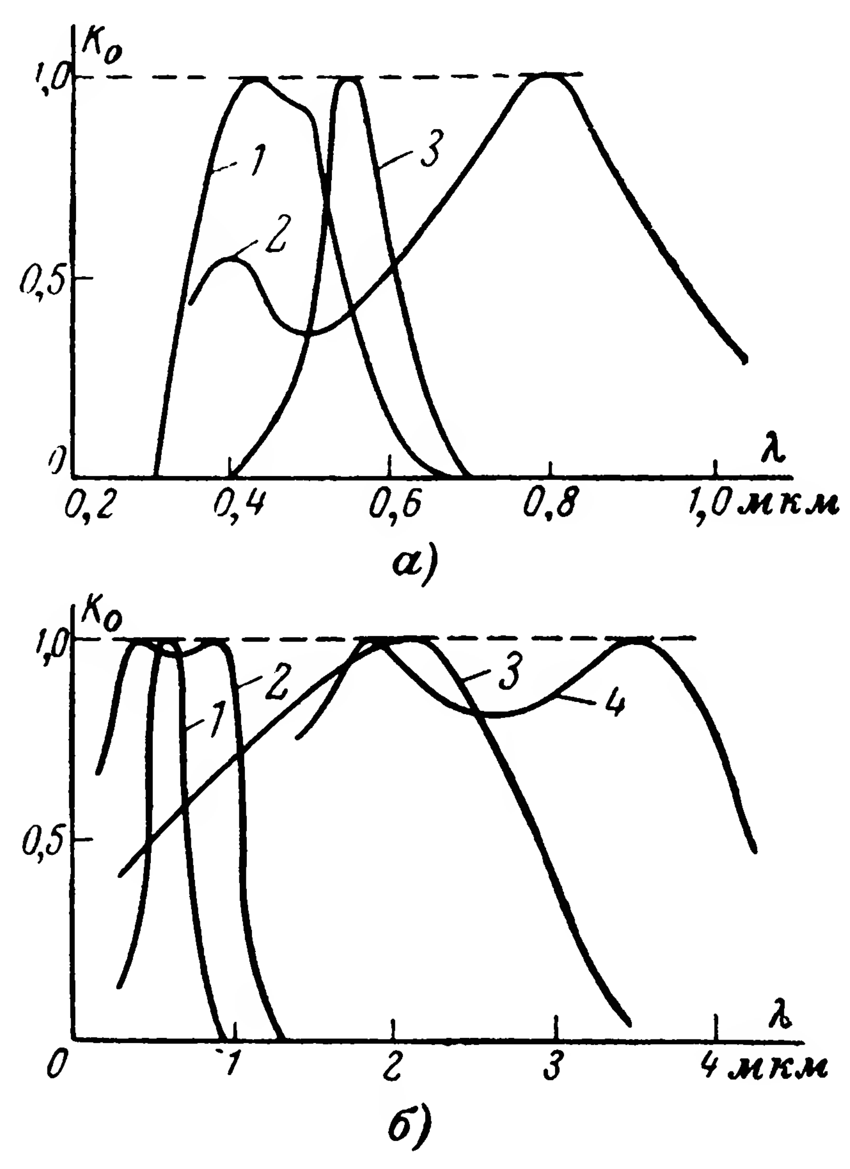


Рис. 31. Спектральные чувствительности приемников излучения.

а — вакуумных: *1* — сурьмяно-цезиевого; *2* — кислородно-цезиевого; *3* — кривая видности глаза; *б* — фоторезисторов: *1* — сернисто-кадмиевого; *2* — сернисто-таллиевого; *3* — сернисто-свинцового; *4* — селенисто-свинцового.

Интегральная чувствительность характеризует собой меру реакции приемника на единицу падающего на него сложного немонохроматического излучения.

Таким образом, интегральная чувствительность представляет собой крутизну световой характеристики приемника излучения на ее линейном участке.

Связь между интегральной и спектральной чувствительностями приемника определяется формулой

$$k_{\Sigma} = \frac{\int\limits_0^{\infty} \Phi(\lambda)\, k(\lambda)\, d\lambda}{\int\limits_0^{\infty} \Phi(\lambda)\, d\lambda}, \qquad (154)$$

где $\Phi(\lambda)$ — спектр излучения источника светового сигнала.

Если спектр излучения источника сигнала может быть описан формулой Планка, то

$$k_{\Sigma}(T) = \frac{\int\limits_0^{\infty} r(\lambda,\ T)\, k(\lambda)\, d\lambda}{\int\limits_0^{\infty} r(\lambda,\ T)\, d\lambda}.$$

Из приведенной формулы следует, что интегральная чувствительность является функцией температуры источника света. Паспортная интегральная чувствительность приемников определяется по источнику света — эталонной лампе с температурой нити накала $T_{п} = 2\,854°$ K.

Интегральная чувствительность может быть представлена в следующем виде:

$$k_{\Sigma}(T) = k(\lambda_m) \frac{\int\limits_0^{\infty} r(\lambda,\ T)\, k_0(\lambda)\, d\lambda}{\int\limits_0^{\infty} r(\lambda,\ T)\, d\lambda}.$$

Отношение интегралов

$$\eta(T) = \frac{\int\limits_0^{\infty} r(\lambda,\ T)\, k_0(\lambda)\, d\lambda}{\int\limits_0^{\infty} r(\lambda,\ T)\, d\lambda} \qquad (155)$$

называют коэффициентом использования излучения приемником. В приводимой ниже таблице представлена зависимость коэффициентов использования излучения от температуры источника света для двух типов катодов приемников на внешнем фотоэффекте: кислородно-цезиевого и сурьмяно-цезиевого.

Таблица 5

Тип фотокатода	Температура источника, °К			
	2 500	2 854	3 000	4 000
Кислородно-цезиевый	$4,1 \cdot 10^{-2}$	$7,9 \cdot 10^{-2}$	$9,4 \cdot 10^{-2}$	$2,0 \cdot 10^{-1}$
Сурьмяно-цезиевый	$5,8 \cdot 10^{-3}$	$1,2 \cdot 10^{-2}$	$1,5 \cdot 10^{-2}$	$7,3 \cdot 10^{-2}$

Тип фотокатода	Температура источника, °К			
	5 000	6 000	7 000	8 000
Кислородно-цезиевый	$2{,}6 \cdot 10^{-1}$	$2{,}8 \cdot 10^{-1}$	$3{,}9 \cdot 10^{-1}$	$3{,}5 \cdot 10^{-1}$
Сурьмяно-цезиевый	$1{,}7 \cdot 10^{-1}$	$2{,}6 \cdot 10^{-1}$	$3{,}4 \cdot 10^{-1}$	$4{,}2 \cdot 10^{-1}$

Если температура источника светового сигнала отлична от паспортной, при которой определялась интегральная чувствительность приемника, то интегральная чувствительность приемника по такому источнику может быть определена по формуле

$$k_\Sigma (T_1) = k_\Sigma (T_п) \frac{\eta (T_1)}{\eta (T_п)}. \tag{156}$$

Из данных, приведенных в табл. 5, следует, что интегральная чувствительность приемника может меняться в десятки раз при изменении температуры источника светового сигнала.

В том случае, когда интегральная чувствительность определена при температуре источника $T_п$ в вольтах на люмен, а необходимо определить его чувствительность в вольтах на ватт для температуры источника T_1, следует воспользоваться формулой

$$k_\Sigma (T_1) \left[\frac{в}{вт}\right] = k_\Sigma (T_п) \left[\frac{в}{лм}\right] \frac{683 \eta (T_1)\, \eta_{гл} (T_п)}{\eta (T_п)}, \tag{157}$$

где 683 — световой эквивалент лучистого потока (см. гл. 2);

$\eta_{гл} (T_п)$ — коэффициент использования излучения человеческим глазом.

Спектральная чувствительность некоторых приемников излучения (в особенности фоторезисторов) зависит также от их температуры. С понижением температуры ее ординаты возрастают, а максимум сдвигается в область более длинных волн. Это изменение легко усматривается из табл. 6, где приведены коэффициенты использования излучения сернисто-свинцовым фоторезистором при различных его температурах.

Таблица 6

Температура приемника, °С	Температура источника, °К		
	1 000	1 500	2 000
+20	$1{,}9 \cdot 10^{-1}$	$4{,}2 \cdot 10^{-1}$	$5{,}7 \cdot 10^{-1}$
—78	$3{,}0 \cdot 10^{-1}$	$4{,}7 \cdot 10^{-1}$	$4{,}9 \cdot 10^{-1}$
—183	$3{,}8 \cdot 10^{-1}$	$5{,}5 \cdot 10^{-1}$	$5{,}8 \cdot 10^{-1}$

Температура приемника, °C	Температура источника, °K		
	2 500	2 854	3 000
+20	$6{,}5\cdot10^{-1}$	$6{,}7\cdot10^{-1}$	$6{,}8\cdot10^{-1}$
—78	$4{,}7\cdot10^{-1}$	$4{,}5\cdot10^{-1}$	$4{,}4\cdot10^{-1}$
—183	$5{,}4\cdot10^{-1}$	$5{,}1\cdot10^{-1}$	$5{,}0\cdot10^{-1}$

Интегральная чувствительность имеет размерность *в/лм*, *в/вт* или *а/лм*, *а/вт*. Рассматривая приемник излучения как звено следящей системы, можно считать интегральную чувствительность коэффициентом усиления приемника.

Частотные характеристики приемников излучения с достаточной для практических расчетов точностью могут быть аппроксимированы функцией

$$W\,(j\omega t) = \frac{k_\Sigma}{1 + j\omega t\tau}, \qquad (158)$$

где τ — постоянная времени приемников.

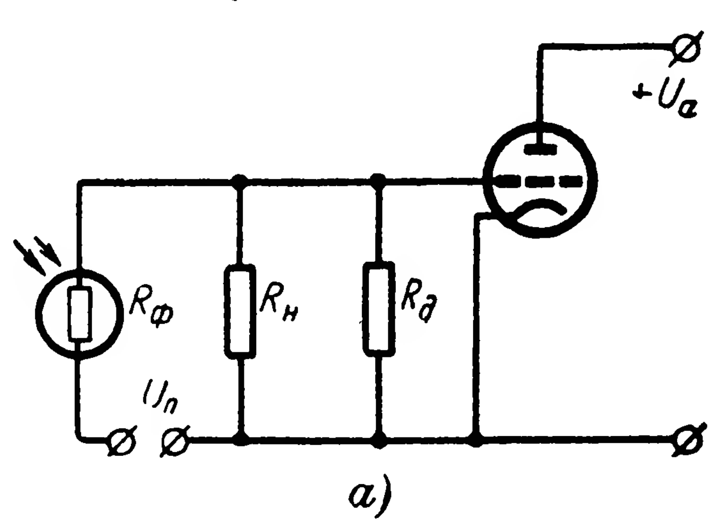
Амплитудно-частотная и фазо-во-частотная характеристики приемников имеют следующий вид:

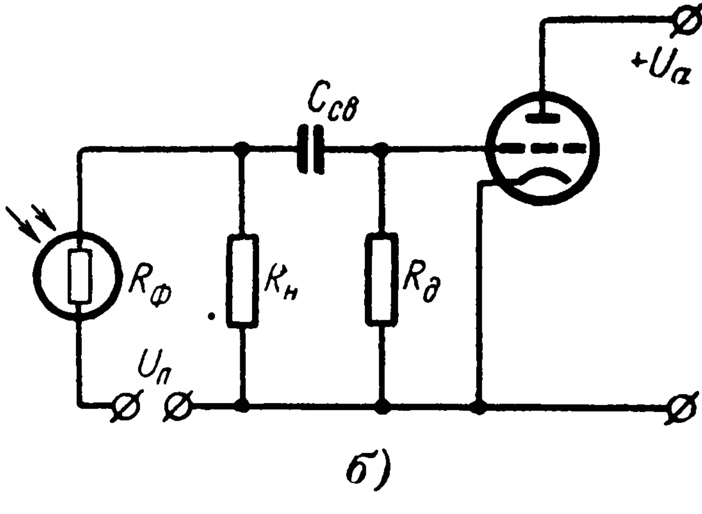
$$W\,(\omega t) = \frac{k_\Sigma}{\sqrt{1 + \omega_t^2\tau^2}}; \qquad (159)$$

$$\psi\,(\omega t) = -\operatorname{arctg} \tau\omega t. \qquad (160)$$

Таким образом, приемники излучения являются инерционными звеньями следящих систем.

Постоянная времени приемников с внешним фотоэффектом определяется временем взаимодействия светового кванта с электроном (10^{-10} *сек*) и временем пролета электрона от катода к аноду (10^{-8} *сек*). Поэтому вакуумные фотоэлементы и фотоумножители можно считать практически безынерционными. Газонаполненные фотоэлементы с внешним фотоэффектом отличаются значительно большей инерционностью. Постоянная времени газонаполненных элементов существенно зависит от напряжения питания: при увеличении напряжения в несколько раз постоянная времени может возрасти в 10 раз и более.





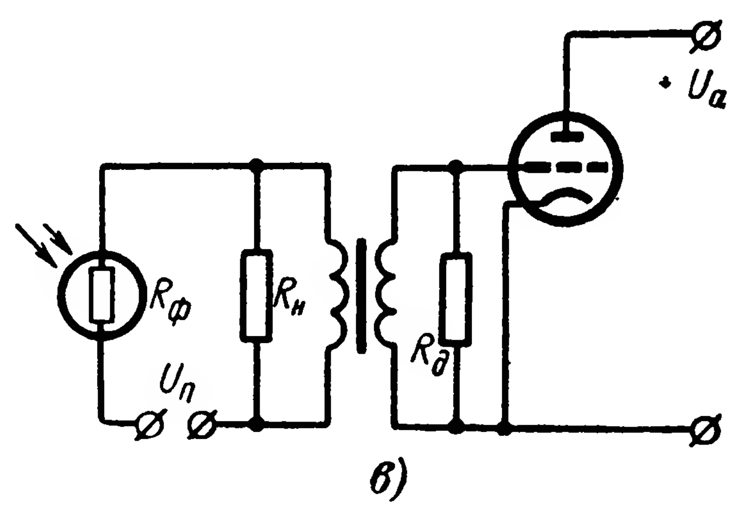


Рис. 32. Схемы фотоэлектрических цепей.

а — с кондуктивной связью; *б* — с емкостной связью; *в* — с трансформаторной связью.

Инерционность фоторезисторов как полупроводниковых приборов определяется временем жизни электронов и дырок, она значительно больше инерционности фотоэлементов с внешним фотоэффектом. С понижением температуры приемника излучения с внутренним фотоэффектом время жизни носителей заряда возрастает, следовательно, возрастает и его постоянная времени.

24. Усилители фототоков

Для усиления электрических сигналов, снимаемых с приемников излучения, служат усилители постоянного тока и усилители переменного тока низкой частоты. Наиболее распространенными являются ламповые усилители, обладающие низким уровнем собственных шумов. В случаях применения полупроводниковых усилителей первый каскад усиления иногда для уменьшения шумов усилителя делается ламповым.

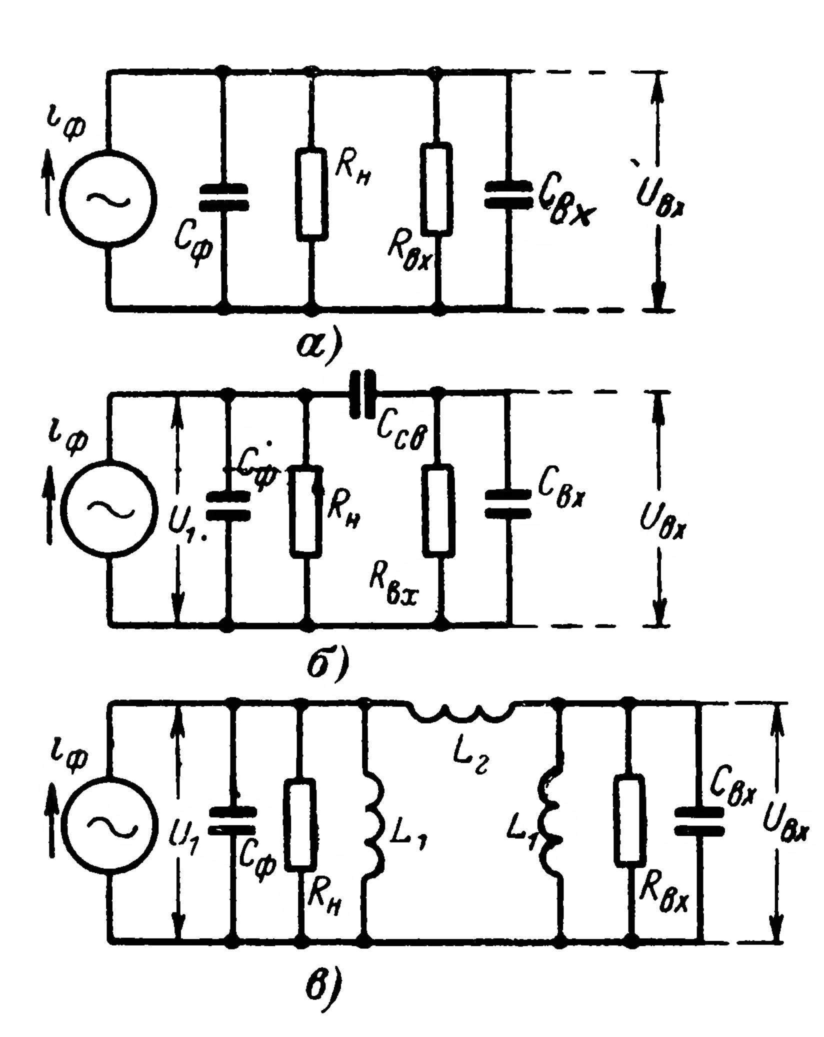


Рис. 33. Эквивалентные схемы цепей.

а — с кондуктивной связью; *б* — с емкостной связью; *в* — с трансформаторной связью.

При выборе характеристик усилителя приходится учитывать противоречивые требования: он должен обладать большой полосой пропускания, достаточной для обеспечения пропускания полезного сигнала с минимальными искажениями, с другой стороны, полосу пропускания необходимо сужать с целью уменьшения шумов.

Рассмотрим частотные характеристики входных цепей усилителей фототоков. Связь входной фотоэлектрической цепи с первым каскадом усилителя может быть трех видов: кондуктивная, емкостная и трансформаторная. На рис. 32 изображены эти три схемы фотоэлектрических цепей.

Для определения частотных характеристик необходимо воспользоваться эквивалентными схемами, изображенными на рис. 33. На этих схемах приняты следующие обозначения:

$C_ф$ — межэлектродная емкость приемника излучения;

$C_{вх}$ и $R_{вх}$ — входные емкость и сопротивление усилителя.

При кондуктивной связи фотоэлектрической цепи с первым каскадом все элементы цепи включены параллельно, поэтому комплексное сопротивление цепи определяется выражением

$$\frac{1}{Z(j\omega t)} = \frac{1}{R_н} + \frac{1}{R_{вх}} + j\omega t C_ф + j\omega t C_{вх}.$$

Преобразуя это выражение, имеем:

$$Z(j\omega t)=\frac{R_{н}R_{вх}}{R_{вх}+R_{н}+j\omega t\,(C_{ф}+C_{вх})}.$$

Так как

$$Z(j\omega t)=\frac{U_{вх}(j\omega t)}{I_{ф}(j\omega t)},$$

где $U_{вх}(j\omega_t)$ и $I_{ф}(j\omega_t)$ — преобразования Фурье выходного напряжения и фототока, то $Z(j\omega_t)=W_2(j\omega_t)$ является частотной характеристикой входной цепи.

Таким образом, частотная характеристика входной цепи равна:

$$W_2(j\omega t)=\frac{R_{н}R_{вх}}{j\omega t\,(C_{ф}+C_{вх})+R_{н}+R_{вх}}. \qquad (161)$$

Следовательно, входная фотоэлектрическая цепь в данном случае является инерционным звеном.

Найдем теперь частотную характеристику фотоэлектрической цепи вместе с приемником излучения. Частотная характеристика приемника равна:

$$W_1(j\omega t)=\frac{k_{\Sigma}}{j\omega t\tau+1},$$

поэтому

$$W(j\omega t)=\frac{k_{\Sigma}R_{н}R_{вх}}{(j\omega t\tau+1)\,[j\omega t\,(C_{ф}+C_{вх})+R_{н}+R_{вх}]}. \qquad (162)$$

Чтобы определить частотную характеристику входной цепи при емкостной связи с первым каскадом усилителя, необходимо воспользоваться следующей системой узловых уравнений:

$$\left[\frac{1}{R_{н}}+j\omega t\,(C_{ф}+C_{вх})\right]U_1(j\omega t)-j\omega tC_{св}U_{вх}(j\omega t)=I_{ф}(j\omega t),$$

$$-j\omega tC_{св}U_1(j\omega t)+\left[\frac{1}{R_{вх}}+j\omega t\,(C_{св}+C_{вх})\right]U_{вх}(j\omega t)=0.$$

Исключая отсюда функцию $U_1(j\omega t)$, получаем:

$$U_{вх}(j\omega t)=\frac{j\omega tC_{св}I_{ф}(j\omega t)}{\left[\frac{1}{R_{н}}+j\omega t\,(C_{ф}+C_{св})\right]\times}\ldots\rightarrow$$

$$\leftarrow\ldots\frac{}{\times\left[\frac{1}{R_{вх}}+j\omega t\,(C_{св}+C_{вх})\right]-(j\omega tC_{св})^2}.$$

Отсюда следует, что частотная характеристика входной цепи будет:

$$W_2(j\omega_t) = \frac{j\omega_t C_{св}}{\left[\frac{1}{R_н} + j\omega_t (C_ф + C_{св})\right] \times \ldots} \ldots\rightarrow$$

$$\leftarrow\ldots \frac{}{\times \left[\frac{1}{R_{вх}} + j\omega_t (C_{св} + C_{вх})\right] - (j\omega_t C_{св})^2}. \qquad (163)$$

С учетом приемника излучения частотная характеристика фотоэлектрической цепи будет иметь следующий вид:

$$W(j\omega_t) = \frac{j\omega_t C_{св} k_\Sigma}{(j\omega_t \tau + 1)\left\{\left[\frac{1}{R_н} + j\omega_t (C_ф + C_{св})\right] \times \ldots\right.} \ldots\rightarrow$$

$$\leftarrow\ldots \frac{}{\left.\times \left[\frac{1}{R_{вх}} + j\omega_t (C_{св} + C_{вх})\right] - (j\omega_t C_{св})^2\right\}}. \qquad (164)$$

Чтобы составить систему узловых уравнений для фотоэлектрической цепи с трансформаторной связью, необходимо воспользоваться П-образной схемой замещения трансформатора. Значения индуктивностей в схеме замещения трансформатора определяются следующими зависимостями:

$$\frac{1}{L_1} = \frac{1}{L(1+k)};$$

$$\frac{1}{L_2} = \frac{k}{L(1-k^2)},$$

где $k = M/L$ — коэффициент связи между индуктивностями контуров.

Составляя систему узловых уравнений для эквивалентной схемы входной цепи, получаем:

$$\left[\frac{1}{R_н} + j\omega_t C_ф + \frac{1}{j\omega_t L(1+k)} + \frac{k}{j\omega_t L(1-k^2)}\right] \times$$

$$\times U_1(j\omega_t) - \frac{k}{j\omega_t L(1-k^2)} U_{вх}(j\omega_t) = I_ф(j\omega_t);$$

$$-\frac{k}{j\omega_t L(1-k^2)} U_1(j\omega_t) + \left[\frac{1}{R_{вх}} + j\omega_t C_{вх} + \frac{1}{j\omega_t L(1+k)} + \right.$$

$$\left. + \frac{k}{j\omega_t L(1-k^2)}\right] U_{вх}(j\omega_t) = 0.$$

Исключая из уравнений функцию $U_1(j\omega_t)$ и преобразуя получившееся выражение, найдем частотную характеристику входной цепи

$$W_2(j\omega_t) = \frac{j\omega_t k}{\left[(j\omega_t)^2 C_ф L(1-k^2) + \frac{j\omega_t L(1-k^2)}{R_н} + 1\right] \times \left[(j\omega_t)^2 C_{вх} L(1-k^2) + \frac{j\omega_t L(1-k^2)}{R_{вх}} + 1\right] - \frac{k^2}{L(1-k^2)}} . \quad (165)$$

Частотная характеристика фотоэлектрической цепи с учетом приемника излучения определяется выражением

$$W(j\omega_t) = \frac{j\omega_t k k_\Sigma}{(j\omega_t\tau + 1)\left\{\left[(j\omega_t)^2 C_ф L(1-k^2) + \frac{j\omega_t L(1-k^2)}{R_н} + 1\right] \times \left[(j\omega_t)^2 C_{вх} L(1-k^2) + \frac{j\omega_t L(1-k)^2}{R_{вх}} + 1\right] - \frac{k^2}{L(1-k^2)}\right\}} . \quad (166)$$

При малых частотах ω_t межэлектродной емкостью приемника и входной емкостью усилителя можно пренебречь, поэтому выражение, определяющее частотную характеристику, упрощается:

$$W(j\omega_t) = \frac{j\omega_t k k_\Sigma}{(j\omega_t\tau+1)\left\{\left[\frac{j\omega_t L(1-k)^2}{R_н} + 1\right] \times \left[\frac{j\omega_t L(1-k^2)}{R_{вх}} + 1\right] - \frac{k^2}{L(1-k^2)}\right\}} .$$

Определим теперь частотную характеристику одного каскада усилителя на резисторах с емкостной связью между каскадами. Схема усилителя, а также его эквивалентные схемы приведены на рис. 34.

Частотная характеристика разомкнутой системы

$$W_1(j\omega_t) = \frac{U'_{вых}(j\omega_t)}{U_1(j\omega_t)}$$

выражается следующей формулой:

$$W_1(j\omega_t) = \frac{R_i S Z_а(j\omega_t)}{R_i + Z_а(j\omega_t)},$$

где S — крутизна анодно-сеточной характеристики триода;
R_i — внутреннее сопротивление триода.

С учетом отрицательной обратной связи, создаваемой катодной цепью автоматического смещения, частотную характеристику системы можно представить в следующем виде:

$$W_2(j\omega_t) = \frac{W_1'(j\omega_t)}{1 + W_1(j\omega_t) W_3(j\omega_t)}, \quad (167)$$

где частотная характеристика цепи обратной связи определяется формулой

$$W_3(j\omega t) = \frac{Z_к(j\omega t)}{Z_а(j\omega t)}$$

Подставляя в формулу (167) значения входящих в нее функций, имеем:

$$W_2(j\omega t) = \frac{R_i S Z_а(j\omega t)}{R_i + R_i S Z_к(j\omega t) + Z_а(j\omega t)}. \qquad (168)$$

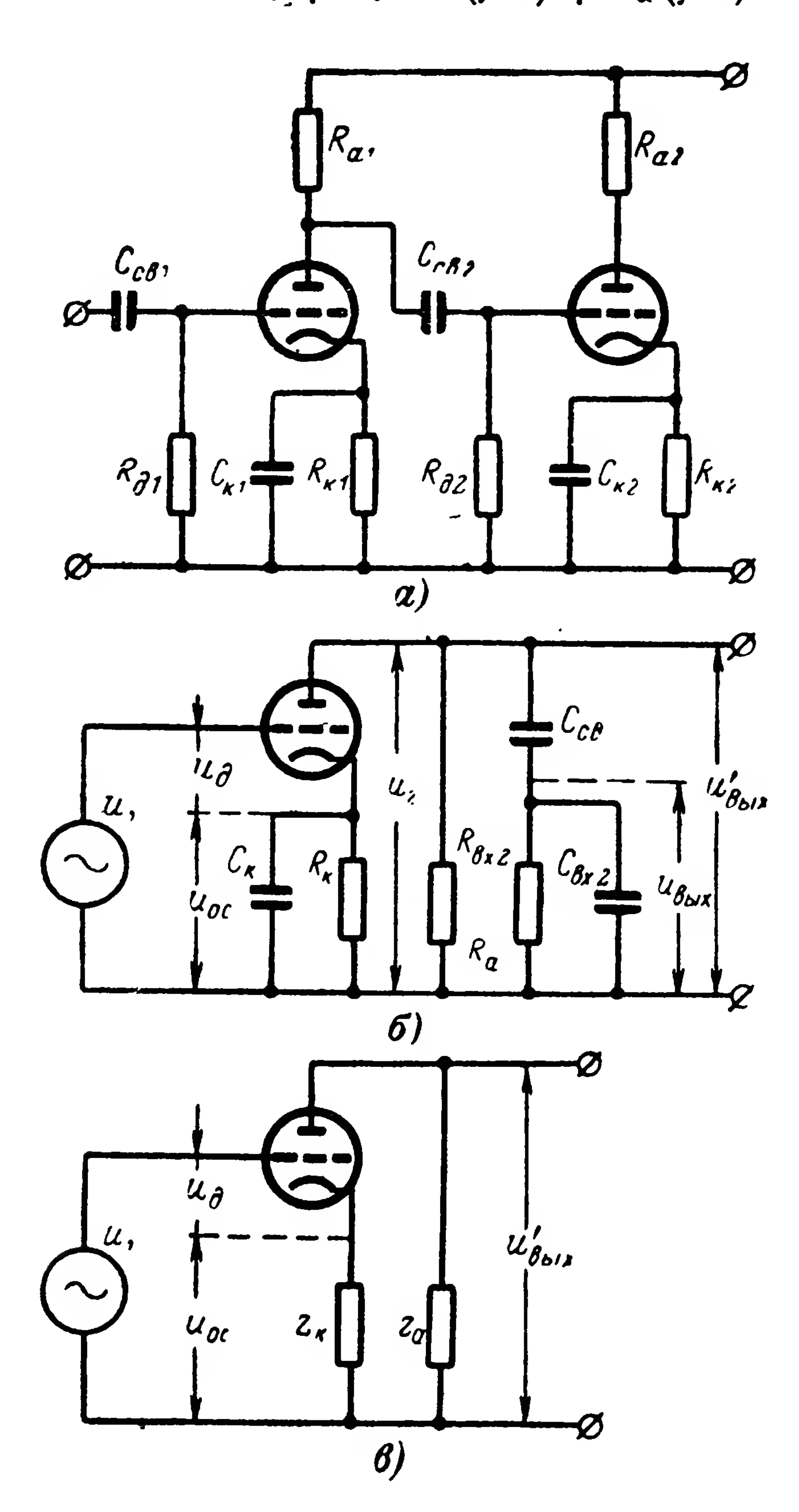


Рис. 34. Усилитель на резисторах.
а — схема усилителя; *б*, *в* — эквивалентные схемы.

Частотная характеристика

$$W_4(j\omega t) = \frac{U_{вых}(j\omega t)}{U'_{вых}(j\omega t)},$$

характеризующая связь между значениями выходных сигналов, имеет следующий вид:

$$\dot{W}_4(j\omega t) = \frac{j\omega t C_{св} R_{вх}}{j\omega t R_{вх}(C_{св} + C_{вх}) + 1}.$$

Следовательно, частотная характеристика первого каскада усилителя

$$W(j\omega t) = \frac{U_{вых}(j\omega t)}{U_1(j\omega t)}$$

определяется формулой

$$W(j\omega_t) = W_2(j\omega_t) W_4(j\omega_t),$$

откуда после подстановки сомножителей получим:

$$W(j\omega t) = \frac{j\omega t C_{св} R_{вх} R_i S Z_а(j\omega t)}{[R_i + R_i S \dot{Z}_к(j\omega t) + Z_а(j\omega t)]\,[j\omega t R_{вх}(C_{вх} + C_{св}) + 1]}. \quad (169)$$

Комплексные сопротивления, входящие в формулу (169), имеют следующие выражения

$$Z_а(j\omega t) = \frac{j\omega t R_{вх} R_а (C_{св} + C_{вх}) + R_а}{j\omega t C_{вх} R_а (j\omega t C_{вх} R_{вх} + 1) + j\omega t R_{вх}(C_{св} + C_{вх})}; \quad (170)$$

$$Z_к(j\omega t) = \frac{R_к}{j\omega t C_к R_к + 1}. \quad (171)$$

Подставляя эти выражения в формулу (169), можно получить развернутую формулу частотной характеристики.

При малых частотах ω_t можно пренебречь емкостью в цепи обратной связи $C_к$ и входной емкостью $C_{вх}$ второго каскада усилителя. Частотная характеристика каскада усилителя в этом случае будет:

$$W(j\omega t) = \frac{j\omega t\,(j\omega t C_{св} R_{вх} + \cdots}{(j\omega t C_{св} R_{вх} + 1)\,\{j\omega t C_{св}\,[R_{вх} + (R_а + R_{вх}) \times} \cdots \to$$

$$\leftarrow \cdots \frac{+ R_а)\, R_i S C_{св} R_{вх}}{\times R_i(1 + S R_к)] + R_i(1 + S R_к) + R_а\}}. \quad (172)$$

Если между каскадами усилителя имеется не емкостная, а кондуктивная связь, то частотная характеристика каскада будет постоянной, не зависящей от частоты. Она будет представлять собой коэффициент усиления

$$k_у = \frac{S R_i R_{вх} R_а}{R_а + R_{вх} + (R_а + R_{вх}) R_i (1 + S R_к)}. \quad (173)$$

Такой же частотной характеристикой приближенно описывается динамика одного каскада электронного усилителя при работе на низких частотах. По этой причине при анализе динамических свойств следящих систем часто заменяют частотную характеристику реального усилителя постоянным коэффициентом усиления.

25. Исполнительные элементы

Наиболее распространенными исполнительными элементами следящих систем с оптическими связями являются асинхронные двухфазные двигатели и двигатели постоянного тока с независимым возбуждением. Реже в качестве исполнительных элементов используются гироскопические устройства (см. рис. 8). Рассмотрим частотные характеристики перечисленных элементов.

При отработке угловых величин частотная характеристика асинхронного двухфазного двигателя может быть представлена в виде

$$W(j\omega t) = \frac{k_{д}}{j\omega t\,(1 + j\omega t \tau_{м})}, \tag{174}$$

где $k_{д}$ — коэффициент передачи двигателя;

$\tau_{м}$ — электромеханическая постоянная времени двигателя.

Двигатель постоянного тока с независимым возбуждением имеет следующую частотную характеристику

$$W(j\omega t) = \frac{k_{д}}{j\omega t\,[1 + \tau_{м} j\omega t + \tau_{м}\tau_{я}\,(j\omega t)^2]}, \tag{175}$$

где $\tau_{я}$ — электромагнитная постоянная якоря двигателя.

Для большинства типов двигателей $\tau_{я} \ll \tau_{м}$, поэтому в ряде случаев при анализе следящих систем с оптическими связями можно представлять частотную характеристику двигателя постоянного тока формулой (174).

Для нахождения частотной характеристики одноосного гироскопического стабилизатора, являющегося исполнительным устройством (рис. 35), запишем уравнения его движения в следующем виде:

$$A(j\omega t)^2\,\alpha + f_{\alpha} j\omega t\alpha - Hj\omega t\beta + C_{\alpha}\alpha + M_{д} = M_{\alpha}; \tag{176}$$

$$B(j\omega t)^2\,\beta + f_{\beta} j\omega t\beta + Hj\omega t\alpha + C_{\beta}\beta + M_{м} = M_{\beta}, \tag{177}$$

где α и β — углы стабилизации и прецессии;

A и B — приведенные моменты инерции подвижных частей гиростабилизатора относительно осей стабилизации и прецессии;

H — кинетический момент ротора гиромотора;

f_{α} и f_{β} — коэффициенты моментов вязкого трения в осях стабилизации и прецессии;

C_{α} и C_{β} — коэффициенты моментов упругости;

$M_{д}$ и $M_{м}$ — моменты, создаваемые двигателем стабилизации и датчиком момента;

M_{α} и M_{β} — внешние моменты.

Гироскопический стабилизатор имеет две замкнутые цепи: цепь стабилизации, измерительным устройством которой является датчик углов прецессии, и цепь коррекции, датчиком которой служит фотоэлектрическое устройство. Частотные спектры моментов двигателей стабилизации и коррекции определяются формулами

$$M_{д}(j\omega t) = W_{ст}(j\omega t)\,\beta(j\omega t); \qquad M_{м}(j\omega t) = W_{к}(j\omega t)\,\alpha(j\omega t),$$

где $W_{ст}(j\omega_t)$ и $W_{к}(j\omega_t)$ — частотные характеристики цепей стабилизации и коррекции соответственно.

Чтобы получить частотную характеристику гироскопа необходимо разомкнуть цепь коррекции и составить выражение для частот-

ной характеристики, определяемой отношением

$$W(j\omega t)=\frac{\beta(j\omega t)}{\Delta M_{\alpha}(j\omega t)},$$

где $\Delta M_{\alpha}(j\omega t)=M_{\alpha}(j\omega t)-M_{Д}(j\omega t)$ — суммарный момент на оси стабилизации.

Исключая из формул (176) и (177) переменную $\alpha(j\omega_t)$ и считая равными нулю моменты $M_{м}(j\omega_t)$ и $M_{\beta}(j\omega_t)$, получим:

$$W(j\omega t)=\frac{Hj\omega t}{\{[A(j\omega t)^2+f_{\alpha}j\omega t+C_{\alpha}]\,[B(j\omega t)^2+f_{\beta}j\omega t+C_{\beta}]+H^2(j\omega t)^2\}}. \tag{178}$$

Коэффициенты моментов упругости стараются сделать весьма малыми. Пренебрегая ими, получим более простое выражение для

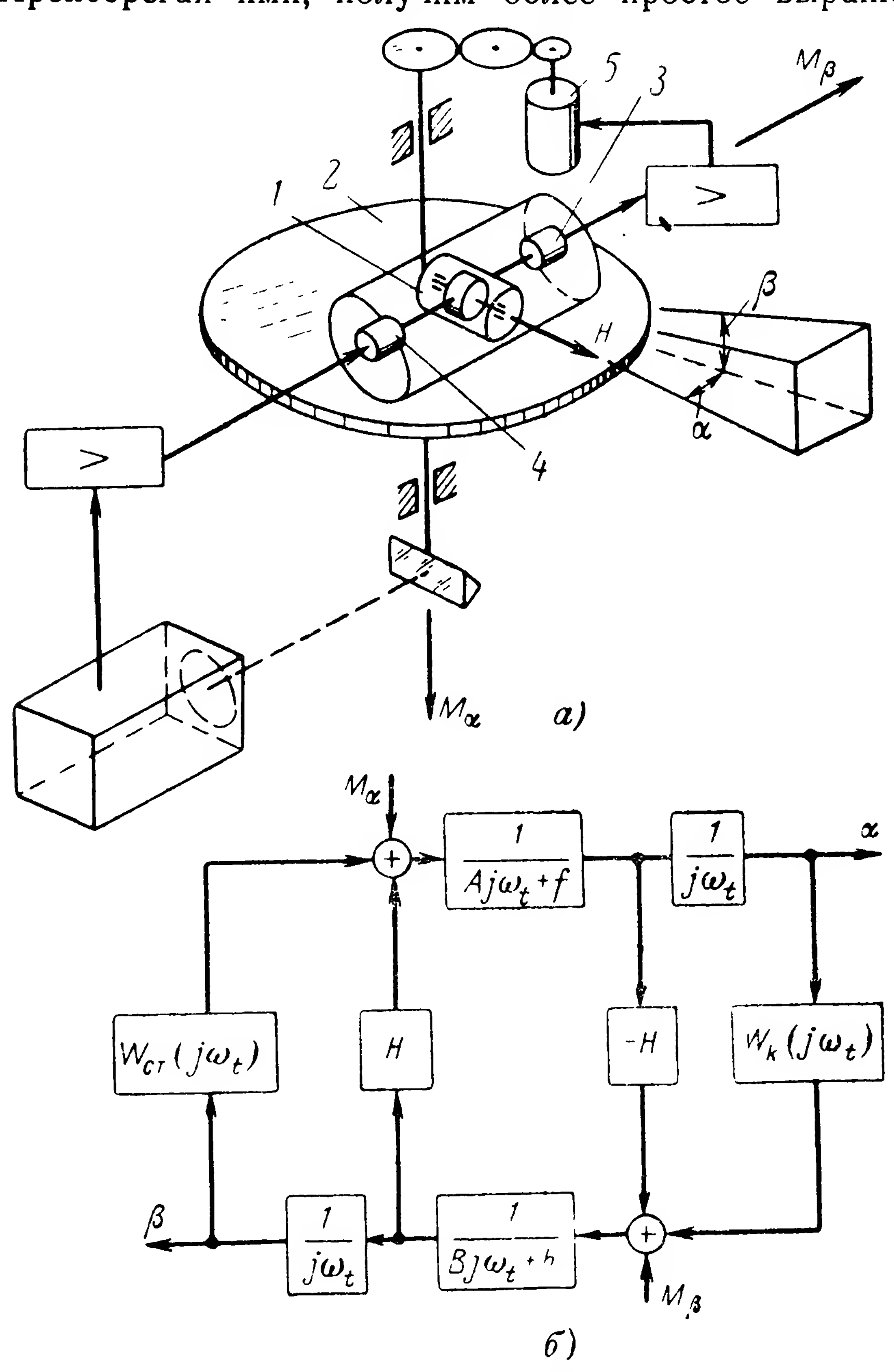


Рис. 35. Одноосный гироскопический стабилизатор.

а — схема стабилизатора; *1* — гироскоп; *2* — стабилизированная площадка; *3* — датчик угла; *4* — датчик момента; *5* — двигатель; *б* — структурная схема.

частотной характеристики гироскопического стабилизатора:

$$W(j\omega t) = \frac{H}{j\omega t\,[AB\,(j\omega t)^2 + (Af_\beta + Bf_\alpha)\,j\omega t + H^2 + f_\alpha f_\beta]}\,. \tag{179}$$

Если ввести обозначения:

$$k_0 = \frac{H}{H^2 + f_\alpha f_\beta};$$

$$\tau_0 = \sqrt{\frac{AB}{H^2 + f_\alpha f_\beta}};$$

$$\xi_0 = \frac{1}{2\sqrt{H^2 + f_\alpha f_\beta}}\left(f_\alpha\sqrt{\frac{B}{A}} + f_\beta\sqrt{\frac{A}{B}}\right),$$

то формула (179) может быть представлена в следующем виде:

$$W(j\omega t) = \frac{k_0}{j\omega_t\,[\tau_0^2\,(j\omega t)^2 + 2\xi_0\tau_0 j\omega t + 1]}\,. \tag{180}$$

В этом выражении τ_0 — постоянная времени, определяемая периодом резонансных колебаний гироскопического стабилизатора, ξ_0 — относительный коэффициент затухания этих колебаний.

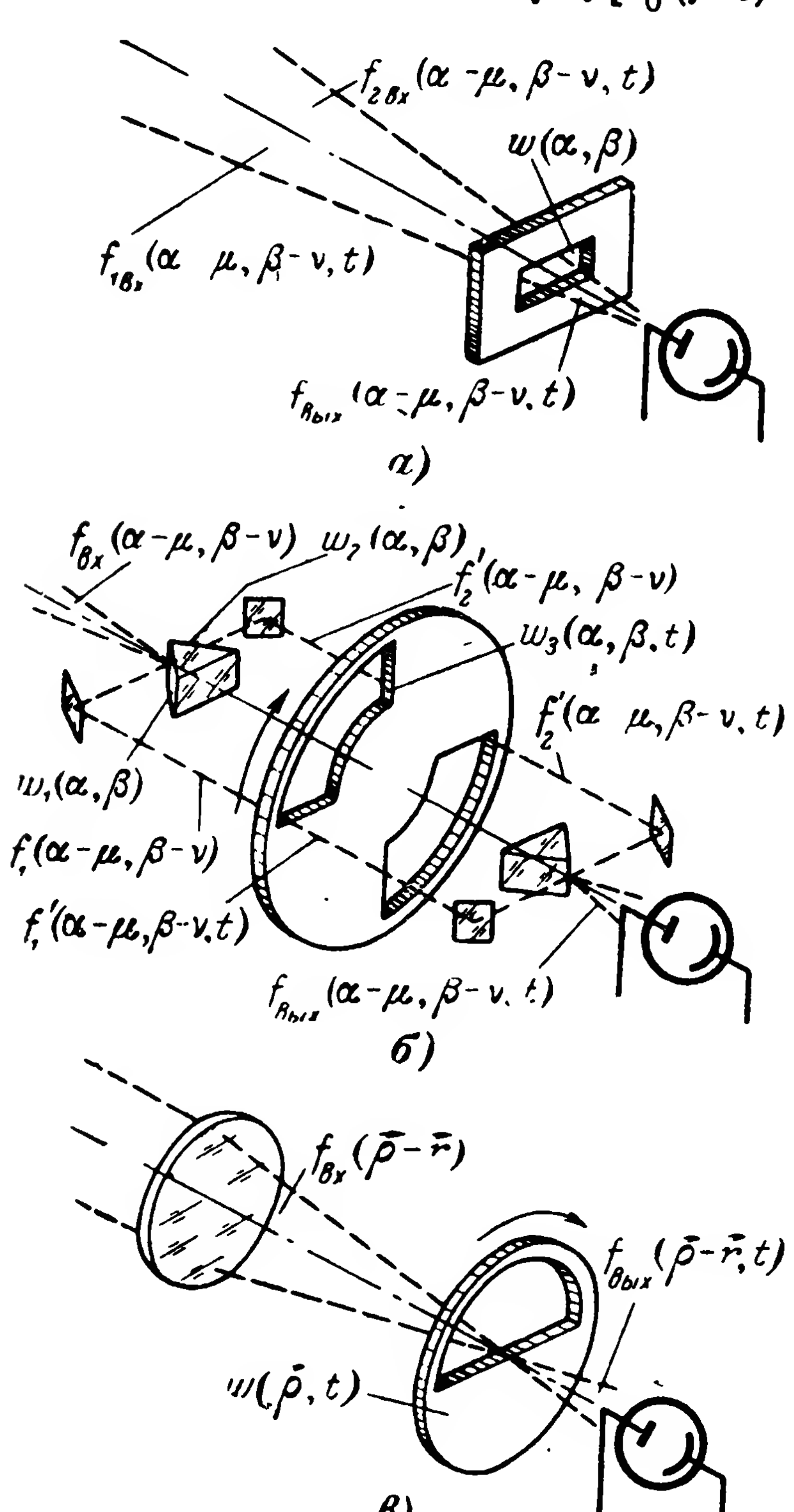


Рис. 36. Типовые схемы измерительных устройств.

а — с неподвижным анализатором; *б*, *в* — с вращающимся анализатором.

26. Расчет статических характеристик фотоэлектрических измерительных устройств

Фотоэлектрические измерительные устройства служат для измерения регулируемых величин (угловых, линейных, температуры, давления, освещенности и т. д.), а также преобразования их в электрические сигналы.

Статические характеристики фотоэлектрических измерительных устройств, как правило, являются нелинейными. Формы статических характеристик отличаются большим разнообразием.

На рис. 36 изображены три типовые схемы фотоэлектрических устройств, служащих для измерения угловых величин.

В первой из этих схем входной сигнал состоит из двух составляющих, нахо-

дящихся в противофазе и равных по амплитуде,

$$f_{1вх}\left(\alpha-\mu,\ \beta-\nu,\ t+\frac{T_t}{2}\right)=f_{2вх}(\alpha-\mu,\ \beta-\nu,\ t),$$

где μ и ν — измеряемые угловые величины.

В качестве анализатора используется неподвижная диафрагма с отверстием, весовая функция которой

$$w=w(\alpha,\ \beta).$$

Статическая характеристика рассматриваемого устройства представляет собой зависимость амплитуды выходного светового сигнала, воздействующего на приемник излучения, от измеряемого углового рассогласования

$$\Phi=\Phi(\mu).$$

Для получения ее найдем характеристики выходного сигнала. Используя неполное преобразование Фурье, получим:

$$F_{1вх}(j\omega_\alpha,\ j\omega_\beta,\ \mu,\ \nu,\ t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{1вх}(\alpha-\mu,\ \beta-\nu,\ t)\,e^{-j(\omega_\alpha\alpha+\omega_\beta\beta)}\,d\alpha\,d\beta;$$

$$F_{2вх}(j\omega_\alpha,\ j\omega_\beta,\ \mu,\ \nu,\ t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{2вх}\times$$

$$\times(\alpha-\mu,\ \beta-\nu,\ t)\,e^{-j(\omega_\alpha\alpha+\omega_\beta\beta)}\,d\alpha\,d\beta.$$

Спектр выходного сигнала равен:

$$F_{вых}(j\omega_\alpha,\ j\omega_\beta,\ \mu,\ \nu,\ t)=[F_{1вх}(j\omega_\alpha,\ j\omega_\beta,\ \mu,\ \nu,\ t)+$$

$$+F_{2вх}(j\omega_\alpha,\ j\omega_\beta,\ \mu,\ \nu,\ t)]\,W(j\omega_\alpha,\ j\omega_\beta). \qquad (181)$$

Интегрируя это выражение по всем частотам, найдем:

$$f_{вых}(\mu,\ \nu,\ t)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F_{вых}(j\omega_\alpha,\ j\omega_\beta,\ \mu,\ \nu,\ t)\,d\omega_\alpha\,d\omega_\beta. \qquad (182)$$

Статическая характеристика измерительного устройства может быть получена из функции $f_{вых}(\mu,\ \nu,\ t)$, если взять ее амплитудное значение и положить $\nu=0$:

$$\Phi(\mu)=f_{m\ вых}(\mu,\ 0). \qquad (183)$$

Для иллюстрации принципа нахождения статической характеристики измерительного устройства рассмотрим пример.

Пример 1. Рассмотрим случай, когда форма входного сигнала и весовая функция являются прямоугольными, а модуляция входного сигнала — косинусоидальная.

Частотная характеристика анализатора определяется зависимостью

$$W(j\omega_\alpha, j\omega_\beta) = \frac{4}{\omega_\alpha \omega_\beta} \sin \omega_\alpha \frac{\alpha_1}{2} \sin \omega_\beta \frac{\beta_1}{2},$$

а спектр одной из составляющих входного сигнала равен:

$$F_{1вх}(j\omega_\alpha, j\omega_\beta, \mu, \nu, t) = \frac{4}{\omega_\alpha \omega_\beta} \sin \omega_\alpha \frac{\alpha_1}{2} \times$$

$$\times \sin \omega_\beta \frac{\beta_1}{2} e^{-j\omega_\alpha \left(\frac{\alpha_1}{2} + \mu\right)} \cos \omega t_1 t,$$

где ωt_1 — частота модуляции сигнала.

Спектр первой составляющей выходного сигнала равен произведению

$$F_{1вых}(j\omega_\alpha, j\omega_\beta, \mu, \nu, t) = \frac{16}{\omega_\alpha^2 \omega_\beta^2} \sin^2 \omega_\alpha \frac{\alpha_1}{2} \times$$

$$\times \sin^2 \omega_\beta \frac{\beta_1}{2} e^{-j\omega_\alpha \left(\frac{\alpha_1}{2} + \mu\right)} \cos \omega t_1 t.$$

Проинтегрируем спектр по обеим частотам:

$$f_{1вых}(\mu, \nu, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{16}{\omega_\alpha^2 \omega_\beta^2} \sin^2 \omega_\alpha \frac{\alpha_1}{2} \times$$

$$\times \sin^2 \omega_\beta \frac{\beta_1}{2} e^{-j\omega_\alpha \left(\frac{\alpha_1}{2} + \mu\right)} \cos \omega t_1 t d\omega_\alpha d\omega_\beta.$$

Разобьем этот интеграл на два, использовав соотношение

$$e^{-j\omega_\alpha \left(\frac{\alpha_1}{2} + \mu\right)} = \cos \left[-\omega_\alpha \left(\frac{\alpha_1}{2} + \mu\right)\right] -$$

$$- j \sin \left[-\omega_\alpha \left(\frac{\alpha_1}{2} + \mu\right)\right];$$

$$f_{1вых}(\mu, \nu, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{16}{\omega_\alpha^2 \omega_\beta^2} \sin^2 \omega_\alpha \frac{\alpha_1}{2} \times$$

$$\times \sin^2 \omega_\beta \frac{\beta_1}{2} \cos \left[-\omega_\alpha \left(\frac{\alpha_1}{2} + \mu\right)\right] \cos \omega t_1 t d\omega_\alpha d\omega_\beta -$$

$$- \frac{j}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{16}{\omega_\alpha^2 \omega_\beta^2} \sin^2 \omega_\alpha \frac{\alpha_1}{2} \sin^2 \omega_\beta \frac{\beta_1}{2} \times$$

$$\times \sin \left[-\omega_\alpha \left(\frac{\alpha_1}{2} + \mu\right)\right] \cos \omega t_1 t d\omega_\alpha d\omega_\beta.$$

Второй из этих интегралов равняется нулю, а первый отличен от нуля. Вычисляя его, имеем:

$$f_{1\text{вых}}(\mu, t) = \begin{cases} \beta_1 \left(\frac{3\alpha_1}{2} + \mu\right) \cos \omega_{t_1} t & \text{при } |\mu| < \frac{\alpha_1}{2}; \\ 0 & \text{при } |\mu| > \frac{\alpha_1}{2}. \end{cases}$$

Аналогичным способом находим и другую составляющую выходного сигнала:

$$f_{2\text{вых}}(\mu, t) = \begin{cases} \beta_1 \left(\frac{3\alpha_1}{2} - \mu\right) \cos(\omega_{t_1} t + \pi) & \text{при } |\mu| < \frac{\alpha_1}{2}; \\ 0 & \text{при } |\mu| > \frac{\alpha_1}{2}. \end{cases}$$

Так как обе составляющие сигнала находятся в противофазе, то статическая характеристика рассматриваемого измерительного устройства будет определяться зависимостью

$$\Phi(\mu) = \begin{cases} \beta_1 \left(\frac{3\alpha_1}{2} + \mu\right) & \text{при } -\frac{\alpha_1}{2} > \mu > -\frac{3\alpha_1}{2}; \\ 2\beta_1 \mu & \text{при } -\frac{\alpha_1}{2} < \mu < \frac{\alpha_1}{2}; \\ \beta_1 \left(-\frac{3\alpha_1}{2} + \mu\right) & \text{при } \frac{\alpha_1}{2} < \mu < \frac{3\alpha_1}{2}; \\ 0 & \text{при прочих значениях } \mu. \end{cases} \quad (184)$$

Форма статической характеристики изображена на рис. 37,*а*. Она имеет участки отрицательного наклона и ограниченное поле зрения.

Найдем статическую характеристику второго измерительного устройства, изображенного на рис. 36. Анализатор измерительного устройства состоит из двух половин, разделяющих световой сигнал на две части. Если измеряемые углы рассогласования $\mu = \nu = 0$, то обе эти части светового сигнала равны. После модуляции обеих частей сигнала в противофазе они складываются и воздействуют на приемник излучения.

Частотные характеристики каждой из половин анализатора равны:

$$W_1(j\omega_\alpha, j\omega_\beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} w_1(\alpha, \beta)\, e^{-j(\omega_\alpha \alpha + \omega_\beta \beta)}\, d\alpha\, d\beta;$$

$$W_2(j\omega_\alpha, j\omega_\beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} w_2(\alpha, \beta)\, e^{-j(\omega_\alpha \alpha + \omega_\beta \beta)}\, d\alpha\, d\beta,$$

поэтому спектры составляющих светового сигнала на его выходе будут:

$$F_1(j\omega_\alpha, j\omega_\beta, \mu, \nu) = F_{вх}(j\omega_\alpha, j\omega_\beta, \mu, \nu)\, W_1(j\omega_\alpha, j\omega_\beta);$$
$$F_2(j\omega_\alpha, j\omega_\beta, \mu, \nu) = F_{вх}(j\omega_\alpha, j\omega_\beta, \mu, \nu)\, W_2(j\omega_\alpha, j\omega_\beta).$$

После прохождения модулятора спектры составляющих сигналов определяются выражениями:

$$F'_1(j\omega_\alpha, j\omega_\beta, \mu, \nu, t) = F_{вх}(j\omega_\alpha, j\omega_\beta, \mu, \nu) \times$$
$$\times W_1(j\omega_\alpha, j\omega_\beta)\, W_з(j\omega_\alpha, j\omega_\beta, t);$$
$$F'_2(j\omega_\alpha, j\omega_\beta, \mu, \nu, t) = F_{вх}(j\omega_\alpha, j\omega_\beta, \mu, \nu) \times$$
$$\times W_1(j\omega_\alpha, j\omega_\beta)\, W_з(j\omega_\alpha, j\omega_\beta, t),$$

где

$$W_з(j\omega_\alpha, j\omega_\beta, t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} w_з(\alpha, \beta, t)\, e^{-j(\omega_\alpha \alpha + \omega_\beta \beta)}\, d\alpha\, d\beta$$

— частотная характеристика модулятора.

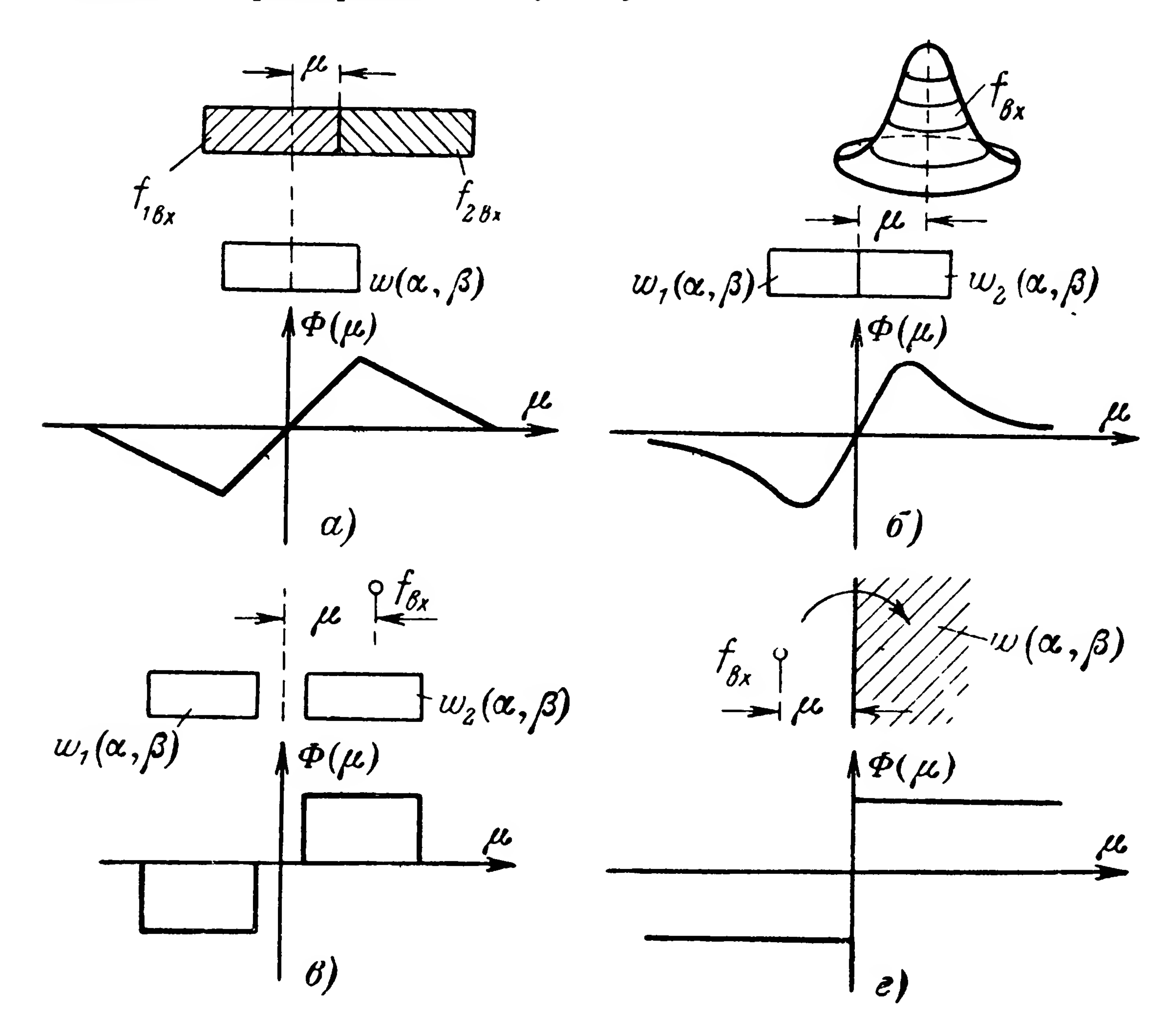


Рис. 37. Нелинейные статические характеристики.

а — треугольник; *б* — с плавным спадом; *в* — ограниченная релейная с зоной нечувствительности; *г* — неограниченная релейная.

Суммируя спектры составляющих, найдем спектр выходного светового сигнала:

$$F_{вых}(j\omega_\alpha, j\omega_\beta, \mu, \nu, t) = F_{вх}(j\omega_\alpha, j\omega_\beta, \mu, \nu)\times$$

$$\times W_3(j\omega_\alpha, j\omega_\beta, t)\,[W_1(j\omega_\alpha, j\omega_\beta) + W_2(j\omega_\alpha, j\omega_\beta)]. \qquad (185)$$

Проинтегрировав эту зависимость, найдем функцию $f_{вых}(\mu, \nu, t)$, из которой получим статическую характеристику [см. формулу (183)].

Проиллюстрируем формулу (185) решением следующего примера.

Пример 2. Пусть на вход измерительного устройства подается сигнал колокольной формы, спектр которого

$$F_{вх}(j\omega_\alpha, j\omega_\beta, \mu) = e^{-\frac{r_1^2}{4\rho_1^2}(\omega_\alpha^2+\omega_\beta^2)}\,e^{-j\omega_\alpha\mu},$$

а анализатор состоит из двух половин с прямоугольными весовыми функциями, обладающих частотными характеристиками

$$W_1(j\omega_\alpha, j\omega_\beta) = \frac{4}{\omega_\alpha\omega_\beta}\sin\omega_\alpha\frac{\alpha_1}{2}\sin\omega_\beta\frac{\beta_1}{2}\,e^{-j\omega_\alpha\frac{\alpha_1}{2}};$$

$$W_2(j\omega_\alpha, j\omega_\beta) = \frac{4}{\omega_\alpha\omega_\beta}\sin\omega_\alpha\frac{\alpha_1}{2}\sin\omega_\beta\frac{\beta_1}{2}\,e^{j\omega_\alpha\frac{\alpha_1}{2}}.$$

Тогда спектр одной из составляющих светового сигнала после прохождения анализатора будет:

$$F_1(j\omega_\alpha, j\omega_\beta, \mu) = \frac{4}{\omega_\alpha\omega_\beta}\sin\omega_\alpha\frac{\alpha_1}{2}\sin\omega_\beta\frac{\beta_1}{2}\times$$

$$\times e^{-j\omega_\alpha\left(\frac{\alpha_1}{2}+\mu\right)}\,e^{-\frac{r_1^2}{4\rho_1^2}(\omega_\alpha^2+\omega_\beta^2)}.$$

Для простоты положим, что частотная характеристика модулятора равна:

$$W_3(j\omega_\alpha, j\omega_\beta, t) = \cos\omega_{t_1}t,$$

тогда

$$F'_1(j\omega_\alpha, j\omega_\beta, \mu, t) = \frac{4}{\omega_\alpha\omega_\beta}\sin\omega_\alpha\frac{\alpha_1}{2}\sin\omega_\beta\frac{\beta_1}{2}\times$$

$$\times e^{-j\omega_\alpha\left(\frac{\alpha_1}{2}+\mu\right)}\,e^{-\frac{r_1^2}{4\rho_1^2}(\omega_\alpha^2+\omega_\beta^2)}\cos\omega_{t_1}t.$$

Найдем функцию $f_{1вых}(\mu, t)$, для чего проинтегрируем полученное выражение

$$f_{1вых}(\mu, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{4}{\omega_\alpha \omega_\beta} \sin \omega_\alpha \frac{\alpha_1}{2} \sin \omega_\beta \frac{\beta_1}{2} \times$$

$$\times e^{j\omega_\alpha \left(\frac{\alpha_1}{2} + \mu\right)} e^{-\frac{r_1^2}{4\beta_1^2}(\omega_\alpha^2 + \omega_\beta^2)} \cos \omega t_1 t d\omega_\alpha d\omega_\beta.$$

Если заменить синусы экспоненциальными функциями, то получим сумму следующих четырех интегралов:

$$f_{1вых}(\mu, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\omega_\alpha \omega_\beta} e^{-\frac{r_1^2}{4\rho_1^2}(\omega_\alpha^2 + \omega_\beta^2)} \times$$

$$\times e^{j\left[\omega_\alpha \left(-\frac{\alpha_1}{2} - \mu - \frac{\alpha_1}{2}\right) + \omega_\beta \frac{\beta_1}{2}\right]} \cos \omega t_1 t d\omega_\alpha d\omega_\beta +$$

$$+ \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\omega_\alpha \omega_\beta} e^{-\frac{r_1^2}{4\rho_1}(\omega_\alpha^2 + \omega_\beta^2)} \times$$

$$\times e^{j\left[\omega_\alpha \left(-\frac{\alpha_1}{2} - \mu + \frac{\alpha_1}{2}\right) - \omega_\beta \frac{\beta_1}{2}\right]} \cos \omega t_1 t d\omega_\alpha d\omega_\beta -$$

$$- \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\omega_\alpha \omega_\beta} e^{-\frac{r_1^2}{4\rho_1^2}(\omega_\alpha^2 + \omega_\beta^2)} \times$$

$$\times e^{j\left[\omega_\alpha \left(-\frac{\alpha_1}{2} - \mu - \frac{\alpha_1}{2}\right) - \omega_\beta \frac{\beta_1}{2}\right]} \cos \omega t_1 t d\omega_\alpha d\omega_\beta -$$

$$- \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\omega_\alpha \omega_\beta} e^{-\frac{r_1^2}{4\rho_1^2}(\omega_\alpha^2 + \omega_\beta^2)} \times$$

$$\times e^{j\left[\omega_\alpha \left(-\frac{\alpha_1}{2} - \mu + \frac{\alpha_1}{2}\right) + \omega_\beta \frac{\beta_1}{2}\right]} \cos \omega t_1 t d\omega_\alpha d\omega_\beta.$$

Такие интегралы уже вычислялись в гл. 4. По аналогии с формулой (124) находим:

$$f_{1\text{вых}}(\mu, t) = \frac{1}{4}\cos\omega t_1 t \times$$

$$\times\left\{\left[1+\Phi_1\left(\frac{-\frac{\alpha_1}{2}-\mu-\frac{\alpha_1}{2}}{r_1}\right)\right]\left[1+\Phi_1\left(\frac{\beta_1}{2r_1}\right)\right]+\right.$$

$$+\left[1+\Phi_1\left(\frac{-\frac{\alpha_1}{2}-\mu+\frac{\alpha_1}{2}}{r_1}\right)\right]\left[1+\Phi_1\left(-\frac{\beta_1}{2r_1}\right)\right]-$$

$$-\left[1+\Phi_1\left(\frac{-\frac{\alpha_1}{2}-\mu-\frac{\alpha_1}{2}}{r_1}\right)\right]\left[1+\Phi_1\left(-\frac{\beta_1}{2r_1}\right)\right]-$$

$$\left.-\left[1+\Phi_1\left(\frac{-\frac{\alpha_1}{2}-\mu+\frac{\alpha_1}{2}}{r_1}\right)\right]\left[1+\Phi_1\left(\frac{\beta_1}{2r_1}\right)\right]\right\}.$$

Преобразуя это выражение, получаем:

$$f_{1\text{вых}}(\mu, t) = \frac{1}{2}\cos\omega t_1 t\,\Phi_1\left(\frac{\beta_1}{2r_1}\right)\left[\Phi_1\left(\frac{\mu}{r_1}\right)-\Phi_1\left(\frac{\alpha_1+\mu}{r_1}\right)\right].$$

Аналогичным способом найдем и другую составляющую функции:

$$f_{2\text{вых}}(\mu, t) = -\frac{1}{2}\cos(\omega t_1 t+\pi)\Phi_1\left(\frac{\beta_1}{2r_1}\right)\left[\Phi_1\left(\frac{\alpha_1-\mu}{r_1}\right)+\right.$$

$$\left.+\Phi_1\left(\frac{\mu}{r_1}\right)\right].$$

Следовательно, статическая характеристика рассматриваемого звена определяется формулой

$$\Phi(\mu) = \frac{1}{2}\Phi_1\left(\frac{\beta_1}{2r_1}\right)\left[\Phi_1\left(\frac{\alpha_1-\mu}{r_1}\right)+2\Phi_1\left(\frac{\mu}{r_1}\right)-\Phi_1\left(\frac{\alpha_1+\mu}{r_1}\right)\right]. \tag{186}$$

Вид этой характеристики представлен на рис. 37,*б*.

Пример 3. Рассмотрим случай, когда входной сигнал является точечным, а между двумя частями анализатора с прямоугольными весовыми функциями имеется разрыв (рис. 37,*в*).

Спектр одной из составляющих сигнала после прохождения через анализатор имеет вид:

$$F_1(j\omega_\alpha, j\omega_\beta, \mu) = \frac{4}{\omega_\alpha\omega_\beta}\sin\omega_\alpha\frac{\alpha_1}{2}\sin\omega_\beta\frac{\beta_1}{2}e^{-j\omega_\alpha\left(\frac{\alpha_1}{2}+\alpha_0+\mu\right)},$$

а на выходе косинусоидального модулятора он будет:

$$F_1(j\omega_\alpha, j\omega_\beta, \mu, t) = \frac{4}{\omega_\alpha\omega_\beta}\sin\omega_\alpha\frac{\alpha_1}{2}\times$$

$$\times\sin\omega_\beta\frac{\beta_1}{2}e^{-j\omega_\alpha\left(\frac{\alpha_1}{2}+\alpha_0+\mu\right)}\cos\omega_{t1}t.$$

Проинтегрируем это выражение по обеим частотам:

$$f_{1вых}(\mu, t) = \cos\omega_{t1}t\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{4}{\omega_\alpha\omega_\beta}\times$$

$$\times\sin\omega_\alpha\frac{\alpha_1}{2}\sin\omega_\beta\frac{\beta_1}{2}e^{-j\omega_\alpha\left(\frac{\alpha_1}{2}+\alpha_0+\mu\right)}d\omega_\alpha\, d\omega_\beta.$$

Представляя синусы экспоненциальными функциями, получим произведение двух функций, которые определяются интегралами

$$f'_{1вых}(\mu) = \frac{1}{2\pi j}\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{j\omega_\alpha\left(-\frac{\alpha_1}{2}-\mu-\alpha_0+\frac{\alpha_1}{2}\right)}\frac{d\omega_\alpha}{\omega_\alpha}-\right.$$

$$\left.-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{j\omega_\alpha\left(-\frac{\alpha_1}{2}-\mu-\alpha_0-\frac{\alpha_1}{2}\right)}\frac{d\omega_\alpha}{\omega_\alpha}\right];$$

$$f''_{1вых}(\mu) = \frac{1}{2\pi j}\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{j\omega_\beta\frac{\beta_1}{2}}\frac{d\omega_\beta}{\omega_\beta}-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-j\omega_\beta\frac{\beta_1}{2}}\frac{d\omega_\beta}{\omega_\beta}\right].$$

Первая разность интегралов представляет собой единичную функцию на интервале от α_0 до $\alpha_0+\alpha_1$:

$$f'_{1вых}(\mu) = \begin{cases} 1 \text{ при } \alpha_0<\mu<\alpha_0+\alpha_1; \\ 0 \text{ при } \mu<\alpha_0 \text{ и } \mu>\alpha_0+\alpha_1. \end{cases}$$

Вторая разность интегралов равна единице.

Таким образом,

$$f_{1вых}(\mu, t) = f'_{1вых}(\mu)\cos\omega_{t1}t.$$

Аналогичным способом найдем, что

$$f_{2вых}(\mu, t) = f'_{2вых}(\mu)\cos(\omega_{t1}t+\pi),$$

где

$$f'_{2вых}(\mu) = \begin{cases} 1 \text{ при } -\alpha_0-\alpha_1<\mu<-\alpha_0; \\ 0 \text{ при } \mu<-\alpha_0-\alpha_1 \text{ и } \mu>-\alpha_0. \end{cases}$$

Статическая характеристика будет определяться формулой

$$\Phi(\mu) = f'_{1вых}(\mu) - f'_{2вых}(\mu). \qquad (187)$$

Она имеет зону нечувствительности, ширина которой равняется $2\alpha_0$.

При нахождении статической характеристики третьего варианта

измерительного устройства, изображенного на рис. 36, целесообразно воспользоваться преобразованием Фурье в векторной форме. Спектр входного сигнала определяется интегралом

$$F_{\text{вх}}(j\vec{\omega}, \vec{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\text{вх}}(\vec{\rho} - \vec{r})\, e^{-j\vec{\omega}\vec{\rho}}\, d\vec{\rho},$$

а частотная характеристика неподвижного анализатора

$$W_1(j\vec{\omega}) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(\vec{\rho})\, e^{-j\vec{\omega}\vec{\rho}}\, d\vec{\rho}.$$

Частотная характеристика вращающегося анализатора будет:

$$W_2(j\vec{\omega}, t) = W_1[jM_{\gamma(t)}\vec{\omega}],$$

где $M_{\gamma(t)}$ — матрица вращения.

Спектр выходного сигнала определяется произведением

$$F_{\text{вых}}(j\vec{\omega}, \vec{r}, t) = F_{\text{вх}}(j\vec{\omega}, \vec{r}) W_2(j\vec{\omega}, t).$$

Интегрируя ее по вектору частоты, получим:

$$f_{\text{вых}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} F_{\text{вых}}(j\vec{\omega}, \vec{r}, t)\, d\vec{\omega}. \qquad (188)$$

Амплитудное значение этой функции представляет собой статическую характеристику измерительного устройства

$$\Phi(\vec{r}) = f_{m\,\text{вых}}(\vec{r}).$$

Так как статическая характеристика рассматриваемого типа часто обладает симметрией вращения, то в таких случаях

$$\Phi(r) = f_{m\,\text{вых}}(r).$$

Пример 4. Пусть анализатор представляет собой вращающуюся полуплоскость, а входной сигнал является точечным. Частотная характеристика неподвижного анализатора будет:

$$W(j\omega_\alpha, j\omega_\beta) = \frac{1}{j\omega_\alpha}\,\delta(\omega_\beta),$$

а спектр входного сигнала равен:

$$F_{\text{вх}}(j\omega_\alpha, j\omega_\beta, \mu) = e^{-j\omega_\alpha \mu}.$$

Чтобы упростить вычисления при нахождении статической характеристики, рассмотрим обращенную задачу, когда анализатор неподвижен, а точечный сигнал вращается. Частотная характеристика анализатора при этом во времени меняться не будет, а спектр сигнала будет функцией времени

$$F_{1\text{вх}}(j\vec{\omega}, t) = F_{\text{вх}}[jM_{\gamma(t)}\vec{\omega}],$$

где матрица равномерного вращения имеет следующий вид:

$$M_{\gamma(t)} = \begin{Vmatrix} \cos\dot{\gamma}t & -\sin\dot{\gamma}t \\ \sin\dot{\gamma}t & \cos\dot{\gamma}t \end{Vmatrix}.$$

Составляющие вектора частоты определяются здесь равенствами

$$\omega'_\alpha(t) = \omega_\alpha \cos\dot{\gamma}t - \omega_\beta \sin\dot{\gamma}t;$$

$$\omega'_\beta(t) = \omega_\alpha \sin\dot{\gamma}t + \omega_\beta \cos\dot{\gamma}t.$$

Следовательно, спектр входного сигнала будет:

$$F_{1\text{вх}}(j\omega_\alpha, j\omega_\beta, \mu, t) = e^{-j\mu(\omega_\alpha \cos\dot{\gamma}t - \omega_\beta \sin\dot{\gamma}t)}.$$

Спектр выходного сигнала равен произведению:

$$F_{\text{вых}}(j\omega_\alpha, j\omega_\beta, \mu, t) = \frac{1}{j\omega_\alpha}\delta(\omega_\beta)\, e^{-j\mu(\omega_\alpha \cos\dot{\gamma}t - \omega_\beta \sin\dot{\gamma}t)}.$$

Проинтегрируем это выражение по обеим частотам

$$f_{\text{вых}}(\mu, t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{j\omega_\alpha}\delta(\omega_\beta) \times$$

$$\times e^{-j\mu(\omega_\alpha \cos\dot{\gamma}t - \omega_\beta \sin\dot{\gamma}t)}\, d\omega_\alpha\, d\omega_\beta.$$

Разделяя интегралы, получаем:

$$f_{\text{вых}}(\mu, t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\omega_\alpha}e^{-j\omega_\alpha\mu\cos\dot{\gamma}t}\, d\omega_\alpha \times$$

$$\times \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega_\beta)\, e^{j\omega_\beta\mu\sin\dot{\gamma}t}\, d\omega_\beta.$$

Второй из интегралов равен единице, а первый представляет собой единичную ступенчатую функцию. Если положить $\dot{\gamma}t=0$, то $f_{m\,\text{вых}}(\mu)=1$ при положительных значениях μ, а при $\dot{\gamma}t=\pi$ $f_{m\,\text{вых}}(\mu)=-1$ при отрицательных значениях μ.

Полученная статическая характеристика изображена на рис. 37,*г*. Она является релейной с неограниченным полем зрения. Так как реальные анализаторы рассмотренного типа не могут быть представлены в виде бесконечно простирающейся полуплоскости, а ограничены в пространстве, то статические характеристики их также ограничены.

27. Коэффициенты гармонической линеаризации статических характеристик фотоэлектрических устройств

Гармоническая линеаризация нелинейных статических характеристик фотоэлектрических измерительных устройств заключается в замене реальной статической характеристики линейной

$$\Phi(\mu, j\omega_t\mu) = q(A)\mu + \frac{q'(A)}{\omega_{t_1}} j\omega_t\mu, \tag{189}$$

где A — амплитуда входного гармонического сигнала

$$\mu = A \sin \omega_i t,$$

$q(A)$, $q'(A)$ — коэффициенты гармонической линеаризации.

Коэффициенты гармонической линеаризации определяются формулами

$$q(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} \Phi(A \sin \psi) \sin \psi \, d\psi; \qquad (190)$$

$$q'(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} \Phi(A \sin \psi) \cos \psi \, d\psi. \qquad (191)$$

Наиболее полное изложение метода гармонической линеаризации нелинейных элементов содержится в монографии Е. П. Попова и И. П. Пальтова [Л. 33].

К особенностям нелинейных статических характеристик фотоэлектрических устройств можно отнести: однозначность, ограниченность поля зрения, возможность разрыва характеристики. Для однозначных статических характеристик коэффициент линеаризации $q'(A) = 0$, поэтому

$$\Phi(\mu) = q(A)\mu.$$

Ограниченность поля зрения может привести к полной потере светового сигнала следящей системой при наличии больших входных возмущений.

В табл. 7 приведены коэффициенты гармонической линеаризации типовых статических характеристик фотоэлектрических измерительных устройств.

Все приведенные в таблице коэффициенты линеаризации получены с использованием принципа суперпозиции. Он заключается в том, что коэффициент линеаризации сложной статической характеристики, состоящей из нескольких более простых, может быть получен путем сложения коэффициентов линеаризации этих элементарных статических характеристик.

Коэффициенты линеаризации всех статических характеристик фотоэлектрических измерительных устройств с увеличением амплитуды входного сигнала стремятся к нулю. Этот факт является следствием ограниченности их полей зрения. Если статическая характеристика имеет разрыв, то коэффициент линеаризации может иметь несколько максимумов.

28. Структурные схемы типовых следящих систем с оптическими связями

На рис. 38 изображены три структурные схемы следящих систем, служащих для отработки угловых величин. В качестве входной угловой величины может быть принято направление на источник светового сигнала, а выходной — направление визирной оси фотоэлектрического измерительного устройства. На схемах приняты следующие обозначения: электрические связи изображены сплошными линиями, оптические — пунктирными и кинематические — двойными сплошными линиями. Ранее было показано, что следящие системы

с оптическими связями нелинейны. Нелинейным элементом следящих систем является фотоэлектрическое измерительное устройство.

В первой из следящих систем в качестве исполнительного устройства используется двигатель, связанный с тахогенератором. Введение гибкой обратной связи позволяет улучшить показатели качества следящей системы.

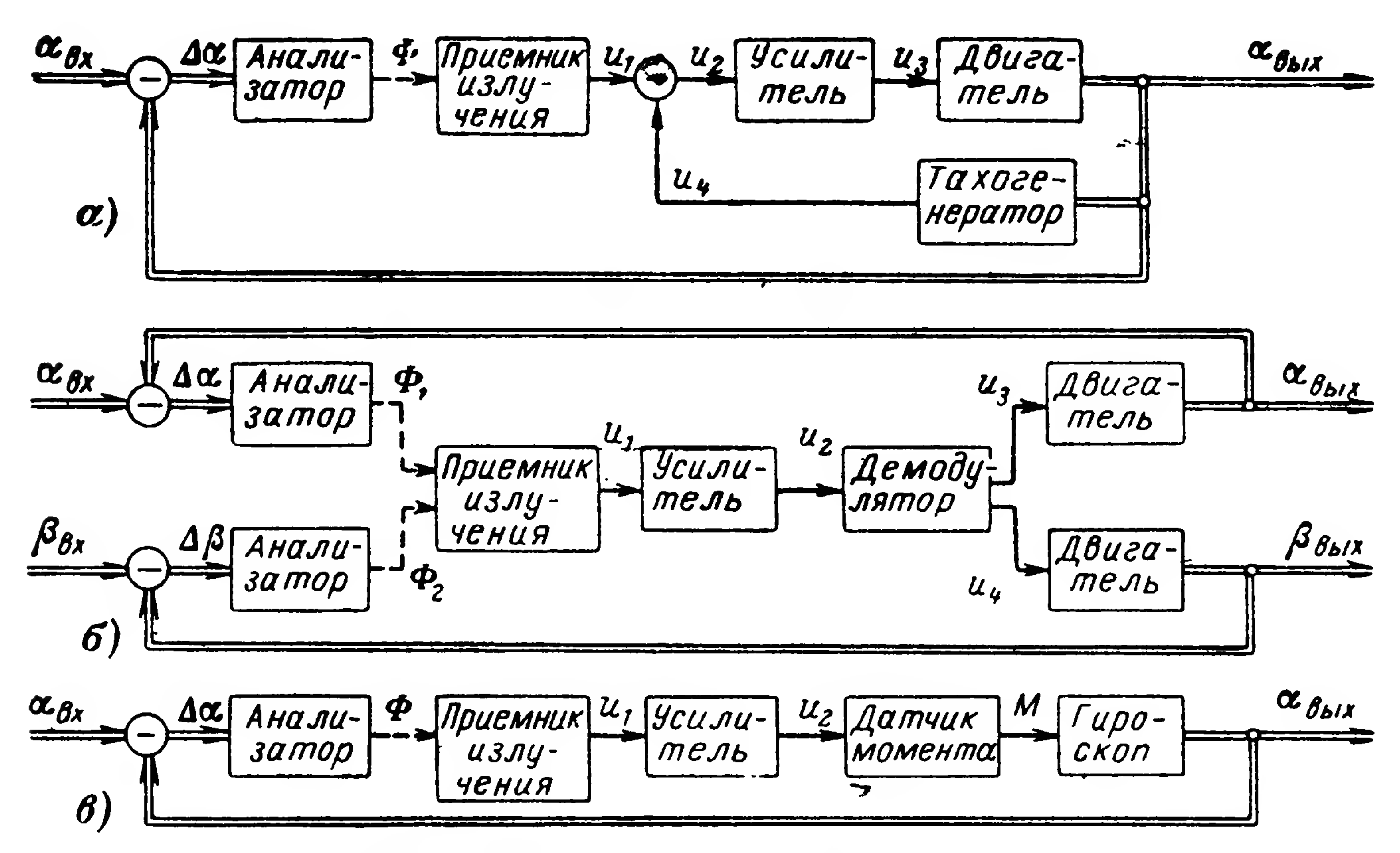


Рис. 38. Типовые схемы следящих систем.

а — одноканальная; *б* — двухканальная; *в* — с гироскопическим исполнительным устройством.

Уравнения работы элементов следящей системы могут быть представлены в следующем виде:

суммирующего элемента

$$\Delta\alpha=\alpha_{вх}-\alpha_{вых};$$

измерительного устройства

$$\Phi=\Phi(\Delta\alpha);$$

приемника излучения

$$U_1=\frac{k_\Sigma}{j\omega t\tau_1+1};$$

суммирующего элемента гибкой обратной связи

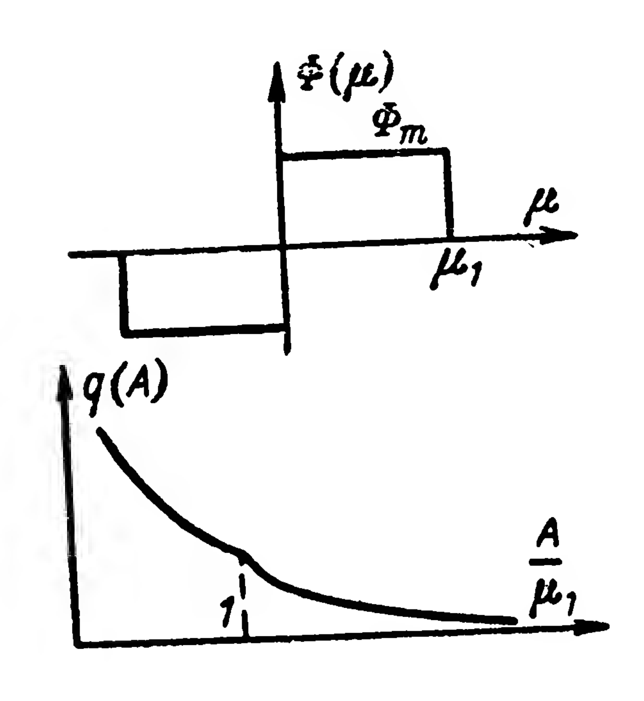
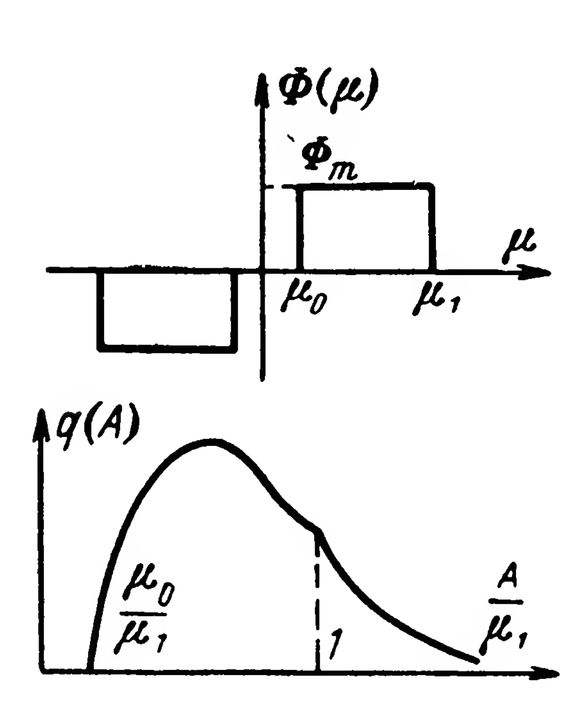
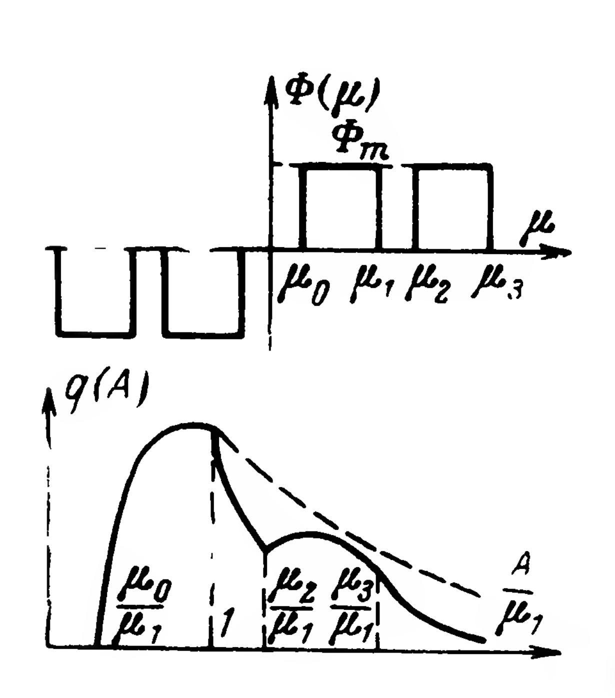
$$U_2=U_1-U_4;$$

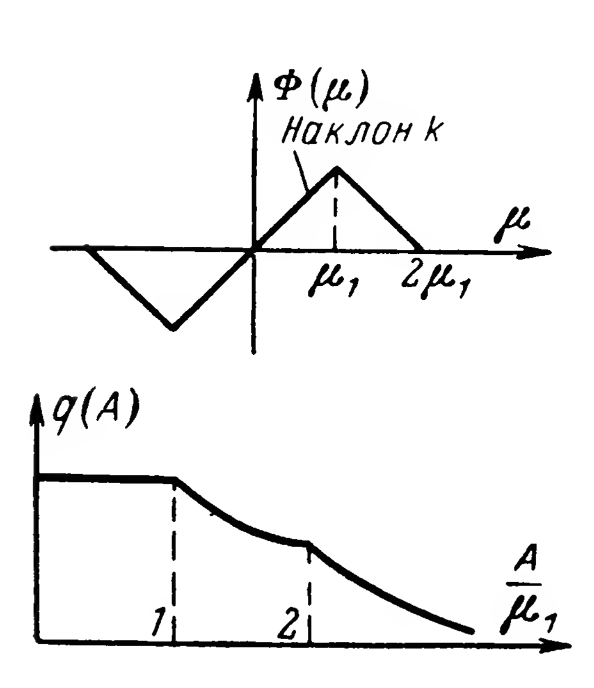
усилителя

$$U_3=k_у U_2;$$

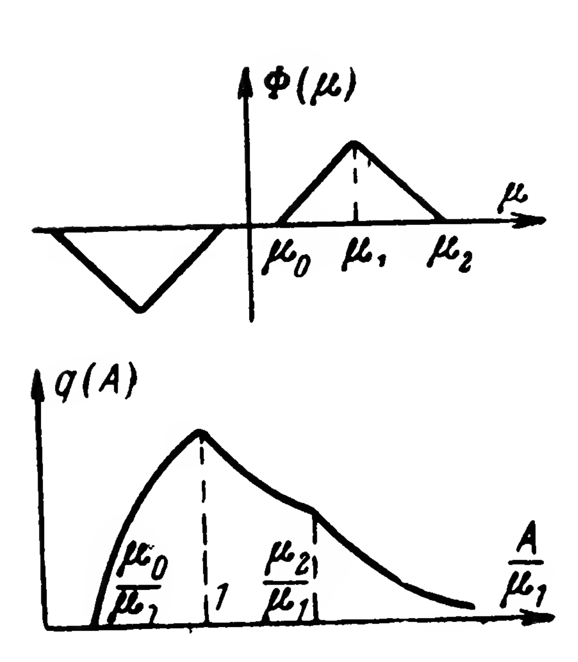
исполнительного двигателя

$$\alpha_{вых}=\frac{k_д}{j\omega t\,(j\omega t\tau_2+1)};$$

Вид нелинейности и функции	Коэффициенты линеаризации
	$q(A)=\frac{4\Phi_m}{\pi A}$ при $A<\mu_1$; $q(A)=\frac{4\Phi_m}{\pi A}\left[1-\sqrt{1-\left(\frac{\mu_1}{A}\right)^2}\right]$ при $A>\mu_1$.
	$q(A)=0$ при $A<\mu_0$, $q(A)=\frac{4\Phi_m}{\pi A}\sqrt{1-\left(\frac{\mu_0}{A}\right)^2}$ при $\mu_0<A<\mu_1$, $q(A)=\frac{4\Phi_m}{\pi A}\left[\sqrt{1-\left(\frac{\mu_0}{A}\right)^2}-\sqrt{1-\left(\frac{\mu_1}{A}\right)^2}\right]$ при $A>\mu_1$.
	$q(A)=0$ при $A<\mu_0$, $q(A)=\frac{4\Phi_m}{\pi A}\sqrt{1-\left(\frac{\mu_0}{A}\right)^2}$ при $\mu_0<A<\mu_1$, $q(A)=\frac{4\Phi_m}{\pi A}\left[\sqrt{1-\left(\frac{\mu_0}{A}\right)^2}-\sqrt{1-\left(\frac{\mu_1}{A}\right)^2}\right]$ при $\mu_1<A<\mu_2$,

Вид нелинейности и функции	Коэффициенты линеаризации
	$q(A)=\frac{4\Phi_m}{\pi A}\left[\sqrt{1-\left(\frac{\mu_0}{A}\right)^2}-\sqrt{1-\left(\frac{\mu_1}{A}\right)^2}+\sqrt{1-\left(\frac{\mu_2}{A}\right)^2}\right]$ при $\mu_2<A<\mu_3$, $q(A)=\frac{4\Phi_m}{\pi A}\left[\sqrt{1-\left(\frac{\mu_0}{A}\right)^2}-\sqrt{1-\left(\frac{\mu_1}{A}\right)^2}+\sqrt{1-\left(\frac{\mu_2}{A}\right)^2}-\sqrt{1-\left(\frac{\mu_3}{A}\right)^2}\right]$ при $A>\mu_3$.
	$q(A)=k$ при $A<\mu_1$, $q(A)=k\left\{\frac{4}{\pi}\left[\arcsin\frac{\mu_1}{A}+\frac{\mu_1}{A}\sqrt{1-\left(\frac{\mu_1}{A}\right)^2}\right]-1\right\}$ при $\mu_1<A<2\mu_1$, $q(A)=\frac{4k}{\pi}\left[\arcsin\frac{\mu_1}{A}+\frac{\mu_1}{A}\sqrt{1-\left(\frac{\mu_1}{A}\right)^2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{2\mu_1}{A}-\frac{\mu_1}{A}\sqrt{1-\left(\frac{2\mu_1}{A}\right)^2}\right]$ при $A>2\mu_1$.

Вид нелинейности и функции	Коэффициенты линеаризации



$$q(A) = 0 \text{ при } A < \mu_0,$$

$$q(A) = k - \frac{2k}{\pi}\left[\arcsin\frac{\mu_0}{A} + \frac{\mu_0}{A}\sqrt{1-\left(\frac{\mu_0}{A}\right)^2}\,\right]$$

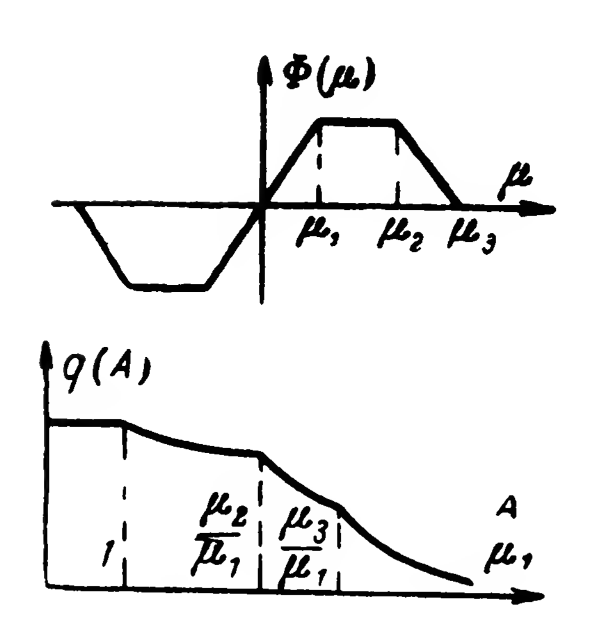
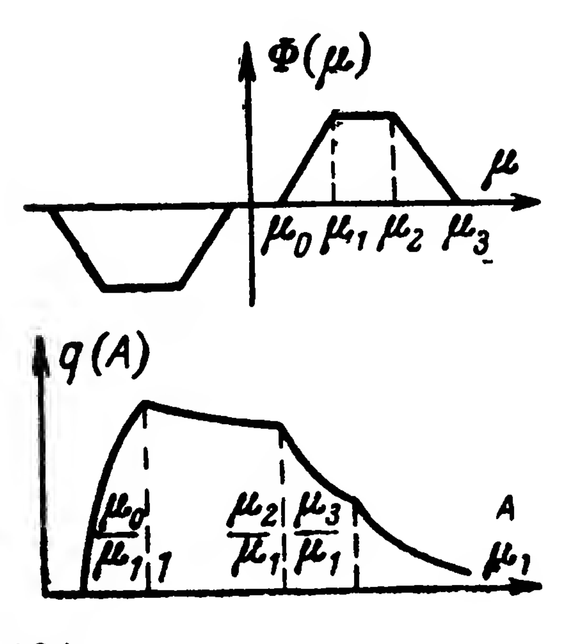
при $\mu_0 < A < \mu_1$,

$$q(A) = \frac{4k}{\pi}\left[\arcsin\frac{\mu_1}{A} + \frac{\mu_1}{A}\sqrt{1-\left(\frac{\mu_1}{A}\right)^2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{\mu_0}{A} - \frac{\mu_0}{2A}\sqrt{1-\left(\frac{\mu_0}{A}\right)^2}\,\right] - k$$

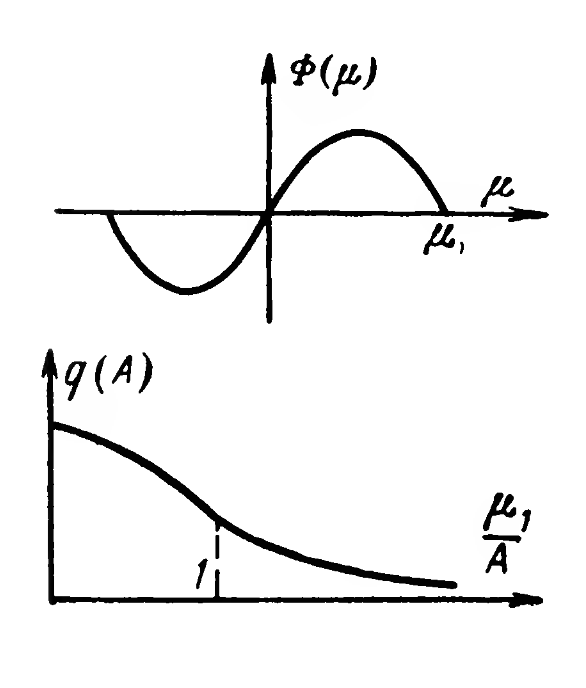
при $\mu_1 < A < \mu_2$,

$$q(A) = \frac{4k}{\pi}\left[\arcsin\frac{\mu_1}{A} + \frac{\mu_1}{A}\sqrt{1-\left(\frac{\mu_1}{A}\right)^2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{\mu_0}{A} - \frac{\mu_0}{2A}\sqrt{1-\left(\frac{\mu_0}{A}\right)^2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{\mu_2}{A} - \frac{\mu_2}{2A}\sqrt{1-\left(\frac{\mu_2}{A}\right)^2}\,\right]$$

при $A > \mu_2$.

Вид нелинейности и функции	Коэффициент линеаризации
	$q(A)=k$ при $A<\mu_1$, $q(A)=\frac{2k}{\pi}\left[\arcsin\frac{\mu_1}{A}+\frac{\mu_1}{A}\sqrt{1-\left(\frac{\mu_1}{A}\right)^2}\right]$ при $\mu_1<A<\mu_2$, $q(A)=\frac{2k}{\pi}\left[\arcsin\frac{\mu_1}{A}+\frac{\mu_1}{A}\sqrt{1-\left(\frac{\mu_1}{A}\right)^2}+\arcsin\frac{\mu_2}{A}+\frac{\mu_2}{A}\sqrt{1-\left(\frac{\mu_2}{A}\right)^2}\right]-k$ при $\mu_2<A<\mu_3$, $q(A)=\frac{2k}{\pi}\left[\arcsin\frac{\mu_1}{A}+\frac{\mu_1}{A}\sqrt{1-\left(\frac{\mu_1}{A}\right)^2}+\arcsin\frac{\mu_2}{A}+\frac{\mu_2}{A}\sqrt{1-\left(\frac{\mu_2}{A}\right)^2}-\arcsin\frac{\mu_3}{A}-\frac{\mu_3}{A}\sqrt{1-\left(\frac{\mu_3}{A}\right)^2}\right]$ при $A>\mu_3$.
	$q(A)=0$ при $A<\mu_0$, $q(A)=k-\frac{2k}{\pi}\left[\arcsin\frac{\mu_0}{A}+\frac{\mu_0}{A}\sqrt{1-\left(\frac{\mu_0}{A}\right)^2}\right]$ при $\mu_0<A<\mu_1$,

Вид нелинейности и функции	Коэффициенты линеаризации
	$q(A)=\frac{2k}{\pi}\left[\arcsin\frac{\mu_1}{A}+\frac{\mu_1}{A}\sqrt{1-\left(\frac{\mu_1}{A}\right)^2}-\arcsin\frac{\mu_0}{A}-\frac{\mu_0}{A}\sqrt{1-\left(\frac{\mu_0}{A}\right)^2}\right]$ при $\mu_1<A<\mu_2$, $q(A)=\frac{2k}{\pi}\left[\arcsin\frac{\mu_1}{A}+\frac{\mu_1}{A}\sqrt{1-\left(\frac{\mu_1}{A}\right)^2}-\arcsin\frac{\mu_0}{A}-\frac{\mu_0}{A}\sqrt{1-\left(\frac{\mu_0}{A}\right)^2}+\arcsin\frac{\mu_2}{A}+\frac{\mu_2}{A}\sqrt{1-\left(\frac{\mu_2}{A}\right)^2}\right]-k$ при $\mu_2<A<\mu_3$, $q(A)=\frac{2k}{\pi}\left[\arcsin\frac{\mu_1}{A}+\frac{\mu_1}{A}\sqrt{1-\left(\frac{\mu_1}{A}\right)^2}-\arcsin\frac{\mu_0}{A}-\frac{\mu_0}{A}\sqrt{1-\left(\frac{\mu_0}{A}\right)^2}+\arcsin\frac{\mu_2}{A}+\frac{\mu_2}{A}\sqrt{1-\left(\frac{\mu_2}{A}\right)^2}-\arcsin\frac{\mu_3}{A}-\frac{\mu_3}{A}\sqrt{1-\left(\frac{\mu_3}{A}\right)^2}\right]$ при $A>\mu_3$.

Вид нелинейности и функции	Коэффициенты линеаризации
	$\Phi(\mu) = a \sin \mu,$ $q(A) = a \frac{I_1(A)}{A}$ при $A < \mu_1 = \pi$.

тахогенератора

$$U_4 = k_0 j\omega_t \alpha_{\text{вых}}.$$

Вторая следящая система является двухмерной. Она позволяет производить отработку двух угловых величин $\alpha_{\text{вх}}$ и $\beta_{\text{вх}}$. Примерами таких следящих систем могут служить следящие телескопы и координаторы, рассмотренные в гл. 1.

Следящая система имеет два нелинейных измерительных элемента, уравнения работы которых

$$\Phi_1 = \Phi_1(\Delta\alpha);$$

$$\Phi_2 = \Phi_2(\Delta\beta).$$

Приемник излучения и усилительно-преобразовательный тракт обоих каналов едины. Разделение сигналов по двум каналам производится на выходе демодулятора, куда кроме сигнала рассогласования подаются опорные напряжения. Следящая система не имеет перекрестных связей между обоими каналами, поэтому они являются независимыми.

В третьей следящей системе исполнительным устройством служит гироскоп. Под действием момента, приложенного к одной из осей гироскопа, он прецессирует до устранения углового рассогласования.

Уравнения работы элементов следящей системы имеют следующий вид:

датчика момента

$$M = k_{\text{д.м}} U_2;$$

гироскопа

$$\alpha_{\text{вых}} = \frac{k_0}{j\omega t\,[\tau_0^2 (j\omega t)^2 + 2\xi_0 \tau_0 j\omega t + 1]} M.$$

Уравнения работы других элементов следящей системы такие

же, как и уравнения работы элементов первой из следящих систем.

Гироскопическое исполнительное устройство может использоваться также и в двухканальных следящих системах. Для этого на один из датчиков момента подается сигнал рассогласования, зависящий от угла $\Delta\alpha$, а на другой — сигнал, зависящий от угла $\Delta\beta$. Под действием двух моментов гироскоп прецессирует по азимуту и углу места до устранения угловых рассогласований.

29. Устойчивость следящих систем с оптическими связями

В следящих системах с нелинейными фотоэлектрическими измерительными элементами возможно появление автоколебаний. Одним из важнейших требований к следящим системам с оптическими связями является обеспечение необходимой точности отработки угловых и линейных возмущений, поэтому наличие автоколебательного режима работы их нежелательно.

Исследуем автоколебания следящей системы, схема которой изображена на рис. 38,*а*. Статическую характеристику измерительного устройства примем в виде идеальной релейной характеристики с ограниченным полем зрения.

Частотная характеристика замкнутой гармонически линеаризированной системы имеет следующий вид:

$$W(j\omega_t) = \frac{k_у k_д k_\Sigma q(A)}{j\omega t(1 + k_у k_д k_0 + j\omega t\tau_2)(1 + j\omega t\tau_1) + k_у k_д k_\Sigma q(A)}. \quad (192)$$

Обозначения коэффициентов усиления и постоянных времени элементов были приведены в § 28.

Характеристическое уравнение следящей системы будет:

$$(j\omega_t)^3\tau_1\tau_2 + (j\omega_t)^2[\tau_1(1+k_1)+\tau_2] + j\omega_t(1+k_1) + k_2 q(A) = 0, \quad (193)$$

где

$$k_1 = k_у k_д k_0;$$
$$k_2 = k_у k_д k_\Sigma.$$

Выделяя из характеристического уравнения вещественную и мнимую части, имеем:

$$X(A, \omega t) = k_2 q(A) - [\tau_1(1 + k_1) + \tau_2]\,\omega_t^2; \quad (194)$$

$$Y(A, \omega t) = \omega t(1 + k_1) - \tau_1\tau_2\omega_t^3. \quad (195)$$

Приравнивая мнимую часть уравнения нулю, найдем частоту периодического решения характеристического уравнения

$$\Omega = \sqrt{\frac{1 + k_1}{\tau_1\tau_2}}. \quad (196)$$

После подстановки частоты в формулу (194) получим уравнение, характеризующее связь периодического решения с параметрами элементов следящей системы

$$k_2 q(A) - \frac{[\tau_1(1 + k_1) + \tau_2](1 + k_1)}{\tau_1\tau_2} = 0. \quad (197)$$

Найдем амплитуду периодического решения для первого участка статической характеристики, когда $A<\mu_1$. Коэффициент гармонической линеаризации в этом случае имеет следующий вид:

$$q(A)=\frac{4\Phi_m}{\pi A}.$$

Подставляя его в уравнение (197), имеем:

$$A_1=\frac{4\Phi_m\tau_1\tau_2k_2}{\pi[\tau_1(1+k_1)+\tau_2](1+k_1)}. \qquad (198)$$

Чтобы найденное периодическое решение было устойчивым (что соответствует наличию устойчивых автоколебаний следящей системы), необходимо выполнение двух условий: коэффициенты характеристического уравнения должны быть положительны и должно соблюдаться неравенство

$$\frac{\partial X}{\partial A}\frac{\partial Y}{\partial \omega t}-\frac{\partial X}{\partial \omega t}\frac{\partial Y}{\partial A}>0 \text{ при } A=A' \text{ и } \omega t=\Omega.$$

Коэффициенты характеристического уравнения (193) являются положительными, поэтому необходимо проверить выполнение неравенства. Найдем частные производные

$$\frac{\partial X}{\partial A}=-\frac{4\Phi_m k_2}{\pi A^2};$$

$$\frac{\partial X}{\partial \omega t}=-2[\tau_1(1+k_1)+\tau_2]\,\omega t;$$

$$\frac{\partial Y}{\partial A}=0;$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \omega t}=(1+k_1)-3\tau_1\tau_2\omega_t^2.$$

Второе слагаемое неравенства равняется нулю, первое же слагаемое после подстановки в него значений амплитуды и частоты автоколебаний $A=A'$ и $\omega_t=\Omega$ будет:

$$\left.\frac{\partial X}{\partial A}\frac{\partial Y}{\partial \omega t}\right|_{A=A',\ \omega_t=\Omega}=-\frac{4\Phi_m k_2}{\pi A'^2}[-2(1+k_1)]>0.$$

Следовательно, найденное периодическое решение является устойчивым.

Если найденная по формуле (198) амплитуда автоколебаний $A'<\mu_1$ (рис. 39,*а*), то анализ автоколебательного режима для второго участка статической характеристики не имеет смысла, так как периодическое решение характеристического уравнения является единственным.

В том случае, когда определенная по формуле (198) амплитуда $A'>\mu_1$, необходимо проанализировать возможность автоколебательного режима работы следящей системы на втором участке статической характеристики, так как найденное значение амплитуды автоколебаний A' является ложным. Коэффициент гармонической линеа-

ризации статической характеристики измерительного устройства в этом случае будет:

$$q(A) = \frac{4\Phi_m}{\pi A}\left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\mu_1}{A}\right)^2}\right].$$

Амплитуда автоколебаний при этом определяется уравнением

$$\frac{4\Phi_m}{\pi A}\left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\mu_1}{A}\right)^2}\right] = \frac{[\tau_1(1+k_1)+\tau_2](1+k_1)}{\tau_1\tau_2 k_2}. \quad (199)$$

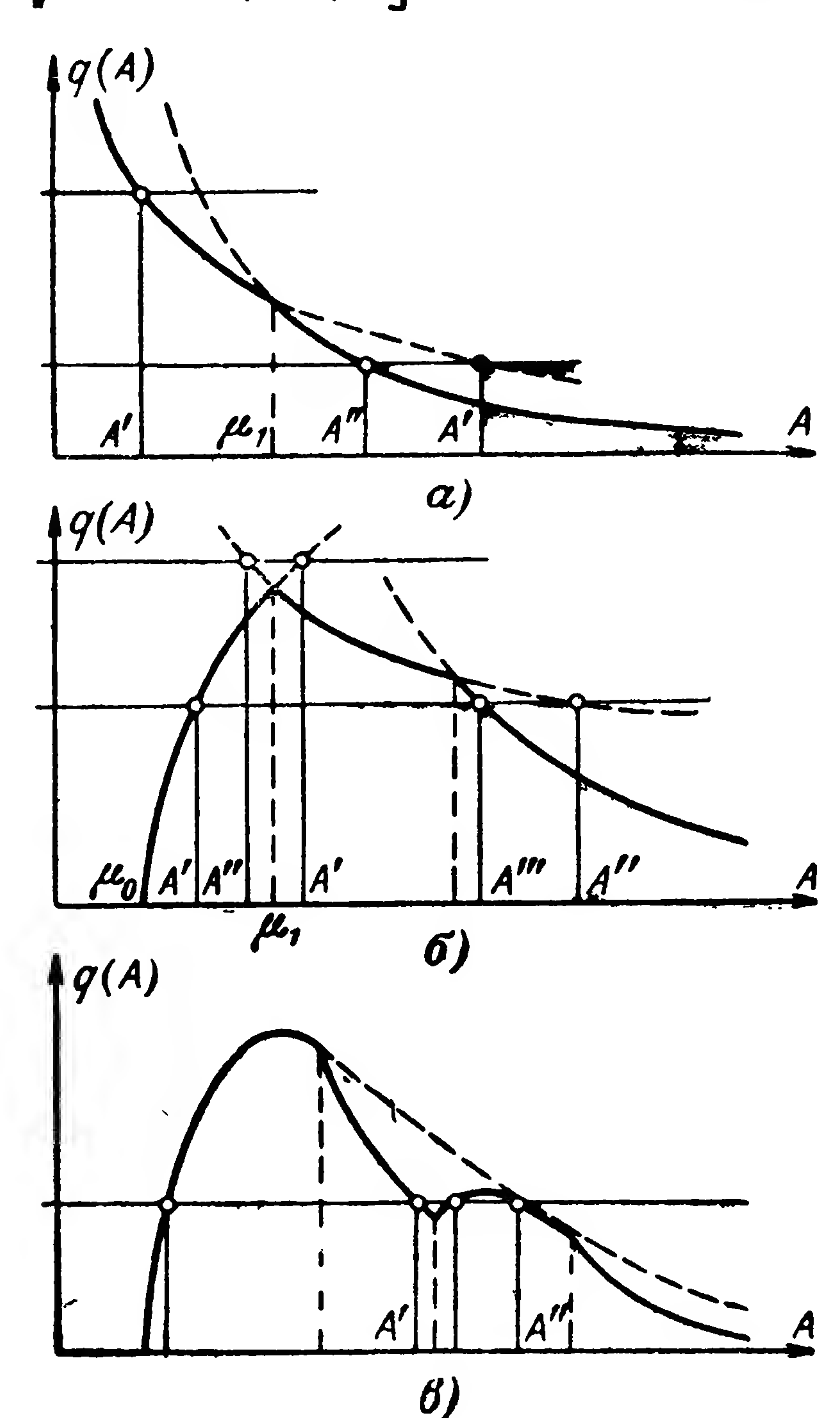


Рис. 39. Схемы определения режимов. автоколебаний.

а — для релейной характеристики; *б* — для треугольной характеристики с зоной нечувствительности; *в* — для характеристики с разрывом.

Введя обозначение

$$a = \frac{\pi[\tau_1(1+k_1)+\tau_2](1+k_1)}{4\Phi_m\tau_1\tau_2k_2},$$

преобразуем это уравнение

$$a^2A^4 - 2aA^3 + \mu_1^2 = 0. \quad (200)$$

Полученное уравнение четвертой степени имеет один действительный корень, равный:

$$A' = \frac{1-\sqrt{2y_1a^2+1}}{a}\left[1-\frac{\sqrt{y_1a^2+1}}{\sqrt[4]{2y_1a^2+1}\sqrt{\sqrt{2y_1a^2+1}-1}}\right], \quad (201)$$

где y_1 — действительный корень вспомогательного уравнения третьей степени

$$y^3-\frac{\mu_1^2}{a^2}y-\frac{\mu_1^2}{2a^4}=0, \quad (202)$$

который равен:

$$y_1=\sqrt[3]{\frac{\mu_1^2}{4a^4}}\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{1-\frac{16}{27}\mu_1^2a^2}}+\right.$$

$$\left.+\sqrt[3]{1-\sqrt{1-\frac{16}{27}\mu_1^2a^2}}\right). \quad (203)$$

Проверим теперь устойчивость периодического решения, определяемого формулой (201). Частные производные, входящие в неравенство, равны:

$$\frac{\partial X}{\partial A}=-\frac{4\Phi_mk_2}{\pi A^2}\left[1-\sqrt{1-\left(\frac{\mu_1}{A}\right)^2}\right]-$$

$$-\frac{4\Phi_mk_2\mu_1^2}{\pi A^4}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\mu_1}{A}\right)^2}};$$

$$\frac{\partial X}{\partial \omega t}=-2\left[\tau_1(1+k_1)+\tau_2\right]\omega t;$$

$$\frac{\partial Y}{\partial A}=0;$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \omega t}=1+k_1-3\tau_1\tau_2\omega_t^2.$$

Подставляя сюда значения амплитуды и частоты периодического решения, имеем:

$$\frac{\partial X}{\partial A}\frac{\partial Y}{\partial \omega t}\bigg|_{A=A',\ \omega_t=\Omega}=$$

$$=-\frac{4\Phi_mk_2}{\pi A'^2}\left[1-\sqrt{1-\left(\frac{\mu_1}{A'}\right)^2}+\frac{\left(\frac{\mu_1}{A'}\right)^2}{\sqrt{1-\left(\frac{\mu_1}{A'}\right)^2}}\right]\times$$

$$\times\left[-2(1+k_1)\right]>0.$$

Отсюда следует, что найденное периодическое решение является устойчивым.

Произведем исследование следящей системы, в которой в каче-

стве исполнительного устройства используется гироскоп (см. рис. 38,*в*).

Частотная характеристика гармонически линеаризированной системы может быть представлена в следующем виде:

$$W(j\omega t)=\frac{q(A)\,k_{\Sigma}k_{\text{у}}k_{\text{дм}}k_0}{j\omega t\,[(j\omega t)^2\,\tau_0^2+j\omega t2\xi_0\tau_0+1]\,(1+j\omega t\tau_1)+k_{\Sigma}k_{\text{у}}k_{\text{дм}}k_0 q(A)}. \tag{204}$$

Постоянная времени и коэффициент усиления гироскопа были выражены через его характеристики в § 25.

Характеристическое уравнение следящей системы имеет вид:

$$(j\omega t)^4\,\tau_0^2\tau_1+(j\omega t)^3\,\tau_0(\tau_0+2\xi_0\tau_1)+(j\omega t)^2(\tau_1+2\xi_0\tau_0)+ \\ +j\omega t+k_1 q(A)=0, \tag{205}$$

где

$$k_1=k_{\Sigma}k_{\text{у}}k_{\text{дм}}k_0.$$

Вещественная и мнимая части характеристического уравнения равны:

$$X(A,\,\omega t)=\omega_t^4\tau_0^2\tau_1-\omega_t^2(\tau_1+2\xi_0\tau_0)+k_1 q(A); \tag{206}$$

$$Y(A,\,\omega t)=\omega t-\omega_t^3\tau_0(\tau_0+2\xi_0\tau_1). \tag{207}$$

Приравняв нулю второе уравнение, найдем частоту периодического решения характеристического уравнения

$$\Omega=\frac{1}{\sqrt{\tau_0(\tau_0-2\xi_0\tau_1)}}. \tag{208}$$

Для нахождения амплитуды периодического решения и условий возникновения автоколебаний в следящей системе зададимся треугольной нелинейной статической характеристикой с зоной нечувствительности и линейным участком. Коэффициент гармонической линеаризации ее имеет следующее аналитическое выражение:

$$q(A)=\begin{cases} 0 \text{ при } A<\mu_0; \\ k-\dfrac{2k}{\pi}\left[\arcsin\dfrac{\mu_0}{A}+\dfrac{\mu_0}{A}\sqrt{1-\left(\dfrac{\mu_0}{A}\right)^2}\right] \text{ при } \mu_0<A<\mu_1; \\ \dfrac{4k}{\pi}\left[\arcsin\dfrac{\mu_1}{A}+\dfrac{\mu_1}{A}\sqrt{1-\left(\dfrac{\mu_1}{A}\right)^2}-\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{\mu_0}{A}-\right. \\ \qquad \left.-\dfrac{\mu_0}{2A}\sqrt{1-\left(\dfrac{\mu_0}{A}\right)^2}\right]-k \text{ при } \mu_1<A<\mu_2; \\ \dfrac{4k}{\pi}\left[\arcsin\dfrac{\mu_1}{A}+\dfrac{\mu_1}{A}\sqrt{1-\left(\dfrac{\mu_1}{A}\right)^2}-\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{\mu_0}{A}-\right. \\ \qquad -\dfrac{\mu_0}{2A}\sqrt{1-\left(\dfrac{\mu_0}{A}\right)^2}-\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{\mu_2}{A}- \\ \qquad \left.-\dfrac{\mu_2}{2A}\sqrt{1-\left(\dfrac{\mu_2}{A}\right)^2}\right] \text{ при } A>\mu_2. \end{cases}$$

Подставляя в формулу (206) частоту периодического решения и преобразуя получившееся выражение, получаем уравнение для нахождения амплитуды автоколебаний:

$$q(A)=\frac{2\xi_0(\tau_1^2+2\xi_0\tau_1\tau_0+\tau_0^2)}{k_1\tau_0(\tau_0+2\xi_0\tau_1)^2}.$$

Для участка $\mu_0<A<\mu_1$ имеем:

$$k-\frac{2k}{\pi}\left[\arcsin\frac{\mu_0}{A}+\frac{\mu_0}{A}\sqrt{1-\left(\frac{\mu_0}{A}\right)^2}\right]=$$

$$=\frac{2\xi_0(\tau_1^2+2\xi_0\tau_1\tau_0+\tau_0^2)}{k_1\tau_0(\tau_0+2\xi_0\tau_1)^2}. \qquad (209)$$

Это трансцендентное уравнение имеет только один действительный корень A' (см. рис. 39,*б*). Если при этом $A'>\mu_1$, то корень является ложным и проверять условие устойчивости периодического решения для него не имеет смысла. При $A'<\mu_1$ корень уравнения (209) является действительным, поэтому для него необходимо проверить условие устойчивости периодического решения.

Частные производные от вещественной и мнимой частей характеристического уравнения равны:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial X}{\partial A}=\frac{4k_1k}{\pi}\frac{\mu_0}{A^2}\sqrt{1-\left(\frac{\mu_0}{A}\right)^2};\\
&\frac{\partial X}{\partial \omega_t}=4\omega_t^3\tau_0^2\tau_1-2\omega t(\tau_1+2\xi_0\tau_0);\\
&\frac{\partial Y}{\partial A}=0;\\
&\frac{\partial Y}{\partial \omega t}=1-3\omega_t^2\tau_0(\tau_0+2\xi_0\tau_1).
\end{aligned}\right\} \qquad (210)$$

Составляя неравенство, характеризующее устойчивость периодического решения, имеем:

$$\left.\frac{\partial X}{\partial A}\frac{\partial Y}{\partial \omega t}-\frac{\partial X}{\partial \omega t}\frac{\partial Y}{\partial A}\right|_{A=A',\ \omega_t=\Omega}=$$

$$=\frac{4k_1k}{\pi}\frac{\mu_0}{A'^2}\sqrt{1-\left(\frac{\mu_0}{A'}\right)^2}(-2)<0.$$

Следовательно, найденное периодическое решение является неустойчивым.

Анализируя графическую зависимость $q(A)$, изображенную на рис. 39,*б*, можно легко видеть, что характеристическое уравнение или не имеет ни одного корня периодического решения или имеет два корня. Первый корень уравнения, находящийся на пересечении линии, параллельной оси абсцисс, с восходящей ветвью функции $q(A)$, соответствует неустойчивому периодическому решению. Второй корень находится на нисходящей ветви функции $q(A)$. Произведем исследование этого корня характеристического уравнения.

Для участка $\mu_1 < A < \mu_2$ амплитуда колебаний определяется уравнением

$$\frac{4k}{\pi}\left[\arcsin\frac{\mu_1}{A}+\frac{\mu_1}{A}\sqrt{1-\left(\frac{\mu_1}{A}\right)^2}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\arcsin\frac{\mu_0}{A}-\frac{\mu_0}{2A}\sqrt{1-\left(\frac{\mu_0}{A}\right)^2}\right]-k=$$
$$=\frac{2\xi_0(\tau_1^2+2\xi_0\tau_1\tau_0+\tau_0^2)}{k_1\tau_0(\tau_0+2\xi_0\tau_1)^2}. \qquad (211)$$

Это уравнение во всех случаях имеет единственный действительный корень. Однако исследование его имеет смысл только в том случае, когда $\mu_1 < A'' < \mu_2$. Если же корень уравнения выходит из указанных пределов, то он является ложным.

Частная производная от действительной части характеристического уравнения по амплитуде имеет следующий вид:

$$\frac{\partial X}{\partial A}=\frac{4k_1k}{\pi}\left[\frac{\mu_0}{A^2}\sqrt{1-\left(\frac{\mu_0}{A}\right)^2}-\frac{2\mu_1}{A^2}\sqrt{1-\left(\frac{\mu_1}{A}\right)^2}\right]. \qquad (212)$$

Остальные частные производные определяются формулами (210). Для определения знака частной производной преобразуем выражение (212):

$$\frac{\partial X}{\partial A}=\frac{4k_1k}{\pi A}\,\frac{\left[\frac{\mu_0}{A}\sqrt{1-\left(\frac{\mu_0}{A}\right)^2}-\frac{2\mu_1}{A}\sqrt{1-\left(\frac{\mu_1}{A}\right)^2}\right]\times}{\frac{\mu_0}{A}\sqrt{1-\left(\frac{\mu_0}{A}\right)^2}+}\cdots\rightarrow$$
$$\leftarrow\cdots\frac{\times\left[\frac{\mu_0}{A}\sqrt{1-\left(\frac{\mu_0}{A}\right)^2}+\frac{2\mu_1}{A}\sqrt{1-\left(\frac{\mu_1}{A}\right)^2}\right]}{+\frac{2\mu_1}{A}\sqrt{1-\left(\frac{\mu_1}{A}\right)^2}}.$$

Перемножая сомножители в числителе, получаем:

$$\frac{\partial X}{\partial A}=\frac{4k_1k}{\pi A}\,\frac{\left[\left(\frac{\mu_0}{A}\right)^2-4\left(\frac{\mu_1}{A}\right)^2\right]-\left[\left(\frac{\mu_0}{A}\right)^4-4\left(\frac{\mu_1}{A}\right)^4\right]}{\frac{\mu_0}{A}\sqrt{1-\left(\frac{\mu_0}{A}\right)^2}+\frac{2\mu_1}{A}\sqrt{1-\left(\frac{\mu_1}{A}\right)^2}}.$$

Так как $\frac{\mu_0}{A}<1$ и $\frac{\mu_1}{A}<1$, то

$$\left|\left(\frac{\mu_0}{A}\right)^2-4\left(\frac{\mu_1}{A}\right)^2\right|>\left|\left(\frac{\mu_0}{A}\right)^4-4\left(\frac{\mu_1}{A}\right)^4\right|.$$

Следовательно, знак частной производной определяется знаком выражения в первой квадратной скобке числителя. Таким образом,

$$\frac{\partial X}{\partial A} < 0.$$

Составляя неравенство из частных производных, находим:

$$\left.\frac{\partial X}{\partial A}\frac{\partial Y}{\partial \omega_t} - \frac{\partial X}{\partial \omega_t}\frac{\partial Y}{\partial A}\right|_{A=A',\ \omega_t=\Omega} > 0.$$

Отсюда следует, что периодическое решение, определяемое уравнением (211), является устойчивым, т. е. в следящей системе возможно появление автоколебаний с амплитудой A''.

Если найденный по формуле (211) корень характеристического уравнения $A'' > \mu_2$, то он является ложным. Из рис. 39,б видно, что он находится на пересечении пунктирной кривой с линией, параллельной оси абсцисс. В этом случае необходимо найти его истинное значение, решая уравнение

$$\frac{4k}{\pi}\left[\arcsin\frac{\mu_1}{A} + \frac{\mu_1}{A}\sqrt{1-\left(\frac{\mu_1}{A}\right)^2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{\mu_0}{A} - \right.$$
$$\left. - \frac{\mu_0}{2A}\sqrt{1-\left(\frac{\mu_0}{A}\right)^2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{\mu_2}{A} - \frac{\mu_2}{2A}\sqrt{1-\left(\frac{\mu_2}{A}\right)^2}\right] =$$
$$= \frac{2\xi_0(\tau_1^2 + 2\xi_0\tau_1\tau_0 + \tau_0^2)}{k_1\tau_0(\tau_0 + 2\xi_0\tau_1)^2}. \qquad (213)$$

Это уравнение также имеет единственный действительный корень.

Проанализируем устойчивость найденного периодического решения характеристического уравнения. Частная производная от действительной части характеристического уравнения по переменной A в этом случае равна:

$$\frac{\partial X}{\partial A} = \frac{4k_1k}{\pi A}\left[\frac{\mu_0}{A}\sqrt{1-\left(\frac{\mu_0}{A}\right)^2} - \right.$$
$$\left. - \frac{2\mu_1}{A}\sqrt{1-\left(\frac{\mu_1}{A}\right)^2} + \frac{\mu_2}{A}\sqrt{1-\left(\frac{\mu_2}{A}\right)^2}\right]. \qquad (214)$$

Остальные частные производные были найдены ранее.

Для определения знака найденной частной производной необходимо найти его в одной из точек кривой, так как функция, определяемая формулой (214), является монотонной. Устремляя переменную A к μ_2, находим:

$$\lim_{A\to\mu_2}\frac{\partial X}{\partial A} = \frac{4k_1k}{\pi\mu_2}\left[\frac{\mu_0}{\mu_2}\sqrt{1-\left(\frac{\mu_0}{\mu_2}\right)^2} - \frac{2\mu_1}{\mu_2}\sqrt{1-\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^2}\right].$$

Полученное выражение, как было показано ранее [см. формулу (212)], имеет отрицательный знак. Следовательно,

$$\left.\frac{\partial X}{\partial A}\frac{\partial Y}{\partial \omega t} - \frac{\partial X}{\partial \omega t}\frac{\partial Y}{A}\right|_{A=A''',\ \omega_t=\Omega} > 0.$$

Таким образом, следящая система имеет устойчивый автоколебательный режим на частоте $\omega_t = \Omega$ с амплитудой $A = A'''$.

Если статическая характеристика имеет разрыв, то функция $q(A)$ имеет два максимума (см. рис. 39,*в*). В этом случае возможно наличие двух устойчивых автоколебательных режимов на одной частоте. Если частная производная от мнимой части характеристического уравнения следящей системы $\frac{\partial Y}{\partial \omega_t} < 0$, то на частоте $\omega_t = \Omega$ наблюдаются устойчивые автоколебательные режимы при амплитудах $A = A'$ и $A = A''$.

Периодические решения, соответствующие двум другим точкам пересечения линии, параллельной оси абсцисс, с графиком функции $q(A)$ являются неустойчивыми.

30. Учет влияния высших гармоник автоколебаний на устойчивость следящих систем с оптическими связями

При исследовании устойчивости нелинейных следящих систем во многих случаях ограничиваются учетом первой гармоники периодического решения характеристического уравнения. При этом основываются на двух допущениях: амплитуды высших гармоник малы по сравнению с амплитудой первой гармоники; частотная характеристика линейной части следящей системы имеет резкий спад в области высоких частот, что обеспечивает подавление высших гармоник сигнала.

Однако на выходе нелинейных звеньев следящих систем с оптическими связями часто наблюдаются сигналы с большими амплитудами высоких гармоник. Так, на рис. 40,*а* показано, что на выходе звена с нелинейностью треугольной формы амплитуда третьей гармоники при указанной амплитуде входного сигнала мало отличается от амплитуды первой гармоники.

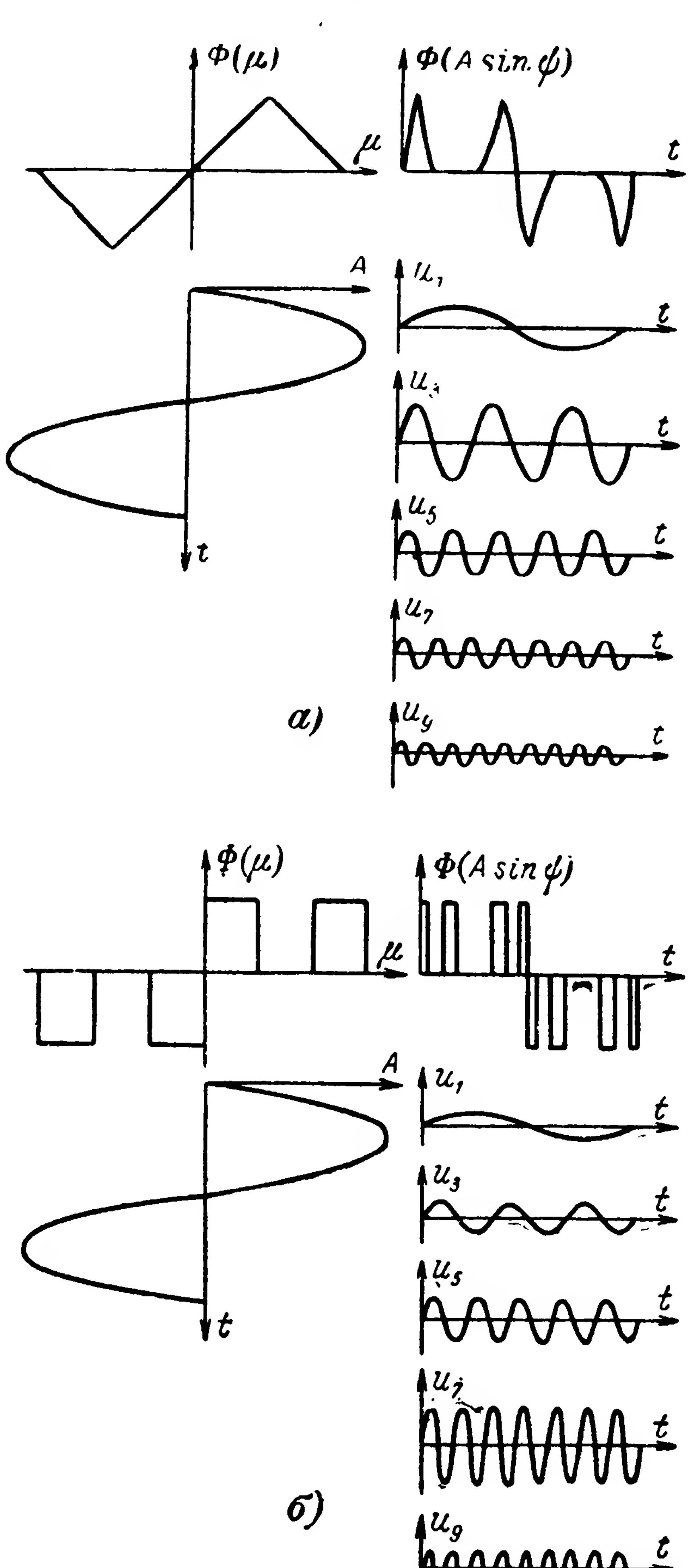


Рис. 40. Гармоники автоколебаний.
а — для треугольной характеристики; *б* — для характеристики с разрывом.

Если статическая характеристика имеет разрыв (рис. 40,*б*), то наблюдается рост амплитуд пятой и, в особенности, седьмой гармоник.

Если учесть третью гармонику выходного сигнала, то статическая характеристика нелинейного элемента может быть представлена в следующем виде:

$$\Phi(\mu,\ j\omega_t\mu) = \left[q_1(A) + \frac{q'_1(A)}{\omega_{t_1}} j\omega_t\mu\right]\mu_1 + \frac{1}{\delta_3}\left[q_3(A) + \right.$$

$$\left. + \frac{q'_3(A)}{3\omega_{t_1}} j\omega_t\mu\right]\mu_3, \qquad (215)$$

где $\mu = A_1 \sin \omega_{t1} t$;

$\mu_3 = A_3 \sin(3\omega_{t1} t + \varphi_3)$;

$\delta_3 = A_3/A_1$;

A_1 и A_3 — амплитуды первой и третьей гармоник сигнала.

Коэффициенты линеаризации первой гармоники автоколебаний определяются по формулам:

$$q_1(A) = q(A) + \Delta q(A); \qquad (216)$$

$$q'_1(A) = q'(A) + \Delta q'(A), \qquad (217)$$

где коэффициенты $q(A)$ и $q'(A)$ определяются формулами (190) и (191), а поправочные коэффициенты, учитывающие влияние третьей гармоники на первую гармонику автоколебаний, равны:

$$\Delta q(A) = \delta_3 \cos\varphi_3 \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d}{d\mu} \Phi(A\sin\psi) \sin 3\psi \sin\psi d\psi; \qquad (218)$$

$$\Delta q'(A) = 3\delta_3 \sin\varphi_3 \frac{4}{\pi A} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi(A\sin\psi) \sin 3\psi\, d\psi. \qquad (219)$$

Для определения коэффициента линеаризации третьей гармоники автоколебаний используются следующие формулы:

$$q_3(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} \Phi(A\sin\psi) \sin(3\psi + \varphi_3)\, d\psi; \qquad (220)$$

$$q'_3(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} \Phi(A\sin\psi) \cos(3\psi + \varphi_3) d\psi. \qquad (221)$$

Для статической характеристики треугольной формы без зоны нечувствительности поправочные коэффициенты линеаризации имеют следующий вид:

$$\Delta q(A) = \delta_3 \cos\varphi_3 \frac{4k}{\pi} \left[\frac{2\mu_1^3}{A^3} \sqrt{1 - \left(\frac{\mu_1}{A}\right)^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{\mu_2^3}{A^3} \sqrt{1 - \left(\frac{\mu_2}{A}\right)^2}\right]; \qquad (222)$$

$$\Delta q'(A) = -\delta_3 \sin\varphi_3 \frac{4k}{\pi}\left[\frac{2\mu_1}{A}\left(1-\frac{\mu_1^2}{A^2}\right)\sqrt{1-\left(\frac{\mu_1}{A}\right)^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{\mu_2}{A}\left(1-\frac{\mu_2^2}{A^2}\right)\sqrt{1-\left(\frac{\mu_2}{A}\right)^2}\right]; \qquad (223)$$

$$q_3(A) = \frac{4k}{\pi}\left\{\frac{2\mu_1}{3A}\left(1-\frac{\mu_1^2}{A^2}\right)\sqrt{1-\left(\frac{\mu_1}{A}\right)^2}-\right.$$

$$\left.-\left[\left(\frac{\mu_2}{A}\right)^3-\frac{2\mu_1}{3A}\left(1-\frac{4\mu_2^2}{A^2}\right)\right]\sqrt{1-\left(\frac{\mu_2}{A}\right)^2}\right\}; \qquad (224)$$

$$q'_{в}(A)=0. \qquad (225)$$

Эти коэффициенты справедливы для амплитуды автоколебаний $A>\mu_2$. Для статической характеристики в форме трапеции поправочные коэффициенты линеаризации определяются формулами [Л. 31]:

$$\Delta q(A) = \delta_3 \cos\varphi_3 \frac{4k}{\pi}\left(\frac{\mu_1^3}{A^3}\sqrt{1-\frac{\mu_1^2}{A^2}}+\right.$$

$$\left.+\frac{\mu_2^3}{A^3}\sqrt{1-\frac{\mu_2^2}{A^2}}-\frac{\mu_3^3}{A^3}\sqrt{1-\frac{\mu_3^2}{A^2}}\right); \qquad (226)$$

$$\Delta q'(A) = -\delta_3 \sin\varphi_3 \frac{4k}{\pi}\left[\frac{\mu_1}{A}\left(1-\frac{\mu_1^2}{A^2}\right)\sqrt{1-\frac{\mu_1^2}{A^2}}+\right.$$

$$\left.+\frac{\mu_2}{A}\left(1-\frac{\mu_2^2}{A^2}\right)\sqrt{1-\frac{\mu_2^2}{A^2}}-\frac{\mu_3}{A}\left(1-\frac{\mu_3^2}{A^2}\right)\sqrt{1-\frac{\mu_3^2}{A^2}}\right]; \qquad (227)$$

$$q_3(A) = \frac{4k}{\pi}\left\{\frac{\mu_1}{3A}\left(1-\frac{\mu_1^2}{A^2}\right)\sqrt{1-\frac{\mu_1^2}{A^2}}+\right.$$

$$+\frac{\mu_2}{3A}\left(1-\frac{\mu_2^2}{A^2}\right)\sqrt{1-\frac{\mu_2^2}{A^2}}-$$

$$\left.-\left[\frac{\mu_3^3}{A^3}-\frac{\mu_1+\mu_2}{3A}\left(1-\frac{4\mu_3^2}{A^2}\right)\right]\sqrt{1-\frac{\mu_3^2}{A^2}}\right\}; \qquad (228)$$

$$q'_3 A=0. \qquad (229)$$

Эти коэффициенты соответствуют амплитудам автоколебаний $A>\mu_3$.

Пример. **Проиллюстрируем способ учета третьей гармоники автоколебаний, рассмотрев для этой цели следящую систему, изображенную на рис. 38,*а*. Частотная характеристика линеаризованной системы равна:**

$$W(j\omega_t)=\frac{k_2 q(A)}{j\omega t(1+k_1+j\omega t\tau_2)(1+j\omega t\tau_1)+k_2 q(A)}.$$

Частота первой гармоники автоколебаний будет:

$$\Omega = \sqrt{\frac{1 + k_1}{\tau_1 \tau_2}},$$

а амплитуда ее находится решением уравнения

$$k_2 q(A) - \frac{[\tau_1(1 + k_1) + \tau_2](1 + k_1)}{\tau_1 \tau_2} = 0$$

[см. формулы (192)—(197)].

Если взять статическую характеристику фотоэлектрического устройства треугольной формы, то коэффициент линеаризации ее будет:

$$q(A) = \frac{4k}{\pi}\left[\arcsin\frac{\mu_1}{A} + \frac{\mu_1}{A}\sqrt{1 - \left(\frac{\mu_1}{A}\right)^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\arcsin\frac{2\mu_1}{A} - \frac{\mu_1}{A}\sqrt{1 - \left(\frac{2\mu_1}{A}\right)^2}\right]$$

(для случая, когда $A > 2\mu_1$).

Представляя характеристическое уравнение следящей системы в виде суммы двух функций

$$R(j\omega_t)q(A) + Q(j\omega_t), \tag{230}$$

находим:

$$R(j\omega_t) = k_2;$$

$$Q(j\omega_t) = j\omega_t[1 + k_1 + (j\omega_t)^2\tau_1\tau_2] - (j\omega_t)^2[\tau_1(1 + k_1) + \tau_2].$$

Относительная амплитуда третьей гармоники равняется:

$$\delta_3 = \left|\frac{R(j3\Omega)}{Q(j3\Omega)}\right| \frac{4k}{\pi}\left[\frac{2\mu_1}{A}\left(1 - \frac{\mu_1^2}{A^2}\right)\sqrt{1 - \left(\frac{\mu_1}{A}\right)^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{\mu_2}{A}\left(1 - \frac{\mu_2^2}{A^2}\right)\sqrt{1 - \left(\frac{\mu_2}{A}\right)^2}\right], \tag{231}$$

а ее фаза

$$\varphi_3 = \arg\frac{-R(j3\Omega)}{Q(j3\Omega)}. \tag{232}$$

Подставляя сюда значения функций $R(j3\Omega)$ и $Q(j3\Omega)$, получаем:

$$\delta_3 = \frac{k_2 \frac{4k}{\pi}}{3\Omega\sqrt{9\Omega^2[\tau_1(1 + k_1) + \tau_2]^2 + (1 + k_1 - 9\Omega^2\tau_1\tau_2)^2}} \times$$

$$\times\left[\frac{2\mu_1}{A}\left(1 - \frac{\mu_1^2}{A^2}\right)\sqrt{1 - \left(\frac{\mu_1}{A}\right)^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{\mu_2}{A}\left(1 - \frac{\mu_2^2}{A^2}\right)\sqrt{1 - \left(\frac{\mu_2}{A}\right)^2}\right];$$

$$\varphi_3 = \operatorname{arctg}\frac{1 + k_1 - 9\Omega^2\tau_1\tau_2}{3\Omega[\tau_1(1 + k_1) + \tau_2]}.$$

Полагая $\tau_1=0{,}01$ *сек*, $\tau_2=0{,}5$ *сек*, $k_1=5$ $1/сек$, $k_2=435$ и $k=100$, по приведенным формулам определим: $\Omega=84{,}8$ $1/сек$, $A=2{,}5$ μ_1, $\delta_3=2{,}76$ и $\varphi_3=1{,}15$. Полученные цифры показывают, что при больших амплитудах автоколебаний, превышающих половину поля зрения измерительного устройства, амплитуда третьей гармоники может быть в несколько раз больше амплитуды первой гармоники колебаний. Следует, однако, учитывать, что третья гармоника будет подавляться линейной частью следящей системы. Поэтому ее относительная величина будет значительно меньше указанной выше.

Найдем коэффициенты усиления линейной части следящей системы для первой и третьей гармоник. Частотная характеристика линейной части системы будет:

$$W_л(j\omega t)=\frac{k_2}{j\omega t\,(j\omega t\tau_2+1+k_1)\,(j\omega t\tau_1+1)},$$

а ее амплитудно-частотная характеристика равняется:

$$|W_л(j\omega t)|=\frac{k_2}{\sqrt{\omega_t^2\,(\omega_t^2\,\tau_1\tau_2-1-k_1)^2+\omega_t^4\,[\tau_1\,(1+k_1)+\tau_2]^2}}.$$

Подставляя сюда $\omega_t=\Omega$, найдем $|W_л(j\Omega)|=0{,}0916$, а при $\omega_t=3\Omega$ $|W_л(j3\Omega)|=0{,}0049$. Отсюда следует, что коэффициент усиления третьей гармоники в 18,7 раз меньше коэффициента усиления первой гармоники, поэтому амплитуда третьей гармоники составит:

$$A_3=0{,}147\ A_1.$$

Частотная характеристика линеаризованной замкнутой системы с учетом поправок в коэффициент линеаризации имеет следующий вид:

$$W(j\omega t)=\frac{k_2\left[q(A)+\Delta q(A)+\dfrac{\Delta q'(A)}{\Omega}\,j\omega t\right]}{j\omega t\,(1+k_1+j\omega t\tau_2)\,(1+j\omega t\tau_1)+k_2\left[q(A)+\Delta q(A)+\dfrac{\Delta q'(A)}{\Omega}\,j\omega t\right]}. \qquad (233)$$

Приравнивая нулю вещественную и мнимую части характеристического уравнения

$$k_2 q(A)+k_2\Delta q(A)-[\tau_1\,(1+k_1)+\tau_2]\,\omega_t^2=0; \qquad (234)$$

$$1+k_1+\frac{\Delta q'(A)}{\Omega}-\tau_1\tau_2\omega_t^2=0, \qquad (235)$$

получим два уравнения, решая которые можно получить уточненные значения частоты Ω_1 и амплитуды автоколебаний. Решить эти уравнения можно графическим методом.

Расчеты показывают, что для нелинейностей с ограниченным полем зрения поправочный коэффициент $\Delta q(A)$ может быть по величине близким основному коэффициенту $q(A)$, поэтому найденные в первом приближении частота и амплитуда первой гармоники значительно отличаются от их значений при втором приближении. Во многих случаях (в особенности для нелинейностей с разрывом) тре-

буется учет не только третьей, но пятой и даже седьмой гармоник автоколебаний. Это существенно усложняет применение метода гармонической линеаризации, поэтому в таких случаях целесообразно использовать точный метод решения уравнений, описывающих работу следящей системы.

Глава шестая

ПОМЕХИ СЛЕДЯЩИХ СИСТЕМ С ОПТИЧЕСКИМИ СВЯЗЯМИ

31. Преобразование двухмерных случайных световых сигналов в функции времени

В следящих системах часто приходится преобразовывать случайный световой сигнал, являющийся функцией двух координат,

$$x_0 = x_0(\alpha,\ \beta)$$

фильтром, весовая функция которого является функцией трех переменных, в том числе и времени:

$$w = w(\alpha,\ \beta,\ t).$$

Примером такого фильтра может служить вращающийся или перемещающийся в пространстве анализатор. В ряде случаев приходится рассматривать и другую задачу: определять характеристики выходного сигнала, когда на входе фильтра имеется световой сигнал, зависящий от трех переменных,

$$x_0 = x_0(\alpha,\ \beta,\ t),$$

а весовая функция фильтра зависит от двух переменных:

$$w = w(\alpha,\ \beta).$$

Выходной сигнал определяется интегралом Дюамеля

$$x_1(\alpha,\ \beta,\ t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_0(\alpha - \xi,\ \beta - \zeta)\, w(\xi,\ \zeta,\ t)\, d\xi\, d\zeta. \qquad (236)$$

Следовательно, выходной сигнал становится функцией трех переменных.

Автокорреляционная функция его также зависит от времени:

$$R_{x_1}(\mu,\ \nu,\ t) = \lim_{\substack{\alpha_1 \to \infty \\ \beta_1 \to \infty}} \frac{1}{4\alpha_1\beta_1} \int_{-\alpha_1}^{\alpha_1}\int_{-\beta_1}^{\beta_1} x_1(\alpha,\ \beta,\ t)\, x_1(\alpha + \mu,\ \beta + \nu,\ t)\, d\alpha\, d\beta.$$

Подставляя сюда значение выходного сигнала, получаем:

$$R_{x_1}(\mu,\ \nu,\ t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi\, d\zeta \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} w(\eta,\ \vartheta,\ t) \times$$

$$\times\, w(\xi,\ \zeta,\ t)\, R_{x_0}(\mu + \xi - \eta,\ \nu + \zeta - \vartheta)\, d\eta\, d\vartheta. \qquad (237)$$

Эта формула является обобщением полученной ранее формулы (134). Полагая $\mu=\nu=0$, находим:

$$D_{x_1}(t) = R_{x_1}(0,\ 0,\ t).$$

Следовательно, и дисперсия выходного сигнала является функцией времени.

Спектральная плотность выходного сигнала равна:

$$S_{x_1}(\omega_\mu,\ \omega_\nu,\ t) = |W(j\omega_\mu,\ j\omega_\nu,\ t)|^2 S_{x_0}(\omega_\mu,\ \omega_\nu). \tag{238}$$

Интегрируя ее, можно получить дисперсию сигнала

$$D_{x_1}(t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} S_{x_1}(\omega_\mu,\ \omega_\nu,\ t)\, d\omega_\mu\, d\omega_\nu. \tag{239}$$

При определении характеристик выходного сигнала иногда целесообразно воспользоваться трехмерной автокорреляционной функцией

$$R_{x_1}(\mu,\ \nu,\ \tau) = \lim_{\substack{\alpha_1\to\infty\\ \beta_1\to\infty\\ t_1\to\infty}} \frac{1}{8\alpha_1\beta_1 t_1}\int_{-\alpha_1}^{\alpha_1}\int_{-\beta_1}^{\beta_1}\int_{-t_1}^{t_1} x_1(\alpha,\ \beta,\ t)\times$$

$$\times x_1(\alpha+\mu,\ \beta+\nu,\ t+\tau)\, d\alpha\, d\beta\, dt. \tag{240}$$

Подставим в этот интеграл выходной сигнал

$$R_{x_1}(\mu,\ \nu,\ \tau) = \lim_{\substack{\alpha_1\to\infty\\ \beta_1\to\infty\\ t_1\to\infty}} \frac{1}{8\alpha_1\beta_1 t_1}\int_{-\alpha_1}^{\alpha_1}\int_{-\beta_1}^{\beta_1}\int_{-t_1}^{t_1} d\alpha\, d\beta\, dt\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_0(\alpha-\xi,\ \beta-\zeta)\, w(\xi,\ \zeta,\ t)\, d\xi\, d\zeta \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\times$$

$$\times x_0(\alpha+\mu-\eta,\ \beta+\nu-\vartheta)\, w(\eta,\ \vartheta,\ t+\tau)\, d\eta\, d\vartheta.$$

Преобразуя подынтегральное выражение, имеем:

$$R_{x_1}(\mu,\ \nu,\ \tau) = \lim_{t_1\to\infty}\frac{1}{2t_1}\int_{-t_1}^{t_1} dt \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi\, d\zeta \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\times$$

$$\times w(\xi,\ \zeta,\ t)\, w(\eta,\ \vartheta,\ t+\tau)\, R_{x_0}(\mu+\xi-\eta,\ \nu+\zeta-\vartheta)\, d\eta\, d\vartheta.$$

Чтобы получить спектральную плотность выходного сигнала, возьмем от левой и правой частей формулы интегралы Фурье, тогда

$$S_{x_1}(\omega_\mu,\ \omega_\nu,\ \omega_\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} d\mu\, d\nu\, d\tau \lim_{t_1\to\infty}\frac{1}{2t_1}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi\, d\zeta \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j(\omega_\mu \mu + \omega_\nu \nu + \omega_\tau \tau)}\times$$

$$\times w(\eta,\ \vartheta,\ t+\tau)\, w(\xi,\ \zeta,\ t)\, R_{x_0}(\mu+\xi-\eta,\ \nu+\zeta-\vartheta)\, d\eta\, d\vartheta.$$

Произведя перегруппировку сомножителей под интегралами, получим:

$$S_{x_1}(\omega_\mu, \omega_\nu, \omega_\tau) = \lim_{t_1\to\infty} \frac{1}{2t_1} \int_{-t_1}^{t_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} w(\xi, \zeta, t) \times$$

$$\times e^{j(\omega_\mu \xi + \omega_\nu \zeta + \omega_\tau t)} d\zeta\, d\zeta\, dt \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \times$$

$$\times w(\eta, \vartheta, t+\tau)\, e^{-j[\omega_\mu \eta + \omega_\nu \vartheta + \omega_\tau (t+\tau)]} d\eta\, d\vartheta\, d\tau \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{x_0}(\mu + \xi - \eta, \nu + \zeta - \vartheta)\, e^{-j[\omega_\mu (\mu+\xi-\eta) + \omega_\nu (\nu+\zeta-\vartheta)]} d\mu\, d\nu.$$

Из полученного выражения следует:

$$S_{x_1}(\omega_\mu, \omega_\nu, \omega_\tau) = |W(j\omega_\mu, j\omega_\nu, j\omega_\tau)|^2 S_{x_0}(\omega_\mu, \omega_\nu). \quad (241)$$

Для иллюстрации принципа нахождения характеристик выходного сигнала рассмотрим следующий пример.

Пример 1. Рассмотрим преобразование пространственного белого шума, обладающего спектральной плотностью

$$S_{x0}(\omega_\mu, \omega_\nu) = D_{x0},$$

фильтром с прямоугольной весовой функцией, подвергающейся растяжению. Частотная характеристика фильтра имеет вид:

$$W(j\omega_\alpha, j\omega_\beta, t) = \frac{4}{\omega_\alpha \omega_\beta} \sin \omega_\alpha \frac{\alpha_1}{2a_{11}t} \sin \omega_\beta \frac{\beta_1}{2a_{22}t}.$$

Спектральная плотность выходного сигнала равна:

$$S_{x_1}(\omega_\mu, \omega_\nu, t) = \frac{16 D_{x_0}}{\omega_\mu^2\, \omega_\nu^2} \sin^2 \omega_\mu \frac{\alpha_1}{2a_{11}t} \sin^2 \omega_\nu \frac{\beta_1}{2a_{22}t}. \quad (242)$$

Дисперсия выходного сигнала определяется интегралом

$$D_{x_1}(t) = \frac{16 D_{x_0}}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\omega_\mu^2\, \omega_\nu^2} \sin^2 \omega_\mu \frac{\alpha_1}{2a_{11}t} \sin^2 \omega_\nu \frac{\beta_1}{2a_{22}t}\, d\omega_\mu\, d\omega_\nu.$$

Вычисляя интеграл, получаем:

$$D_{x_1}(t) = \frac{D_{x_0} \alpha_1 \beta_1}{\alpha_{11} a_{22} t}. \quad (243)$$

Найдем характеристики выходного случайного сигнала при перемещении весовой функции фильтра вдоль одной из координат с по-

стоянной скоростью. Спектр выходного сигнала будет функцией времени

$$X_{\text{вых}}(j\omega_\alpha, j\omega_\beta, t) = X_{\text{вх}}(j\omega_\alpha, j\omega_\beta)\, W(j\omega_\alpha, j\omega_\beta)\, e^{j\omega_\alpha \dot{\alpha}_0 t},$$

поэтому выходной сигнал будет равен:

$$x_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} X_{\text{вх}}(j\omega_\alpha, j\omega_\beta)\, W(j\omega_\alpha, j\omega_\beta)\, e^{j\omega_\alpha \dot{\alpha}_0 t}\, d\omega_\alpha\, d\omega_\beta.$$

С другой стороны, выходной сигнал определяется обратным интегралом Фурье:

$$x_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} X_{\text{вых}}(j\omega_\tau)\, e^{j\omega_\tau t}\, d\omega_\tau.$$

Сравнивая два последних интеграла, можно получить, что двухмерный спектр выходного сигнала равен:

$$X_{\text{вых}}\left(j\frac{\omega_\tau}{\dot{\alpha}_0}, j\omega_\beta\right) = X_{\text{вх}}\left(j\frac{\omega_\tau}{\dot{\alpha}_0}, j\omega_\beta\right) W\left(j\frac{\omega_\tau}{\dot{\alpha}_0}, j\omega_\beta\right), \quad (244)$$

а его временной спектр будет:

$$X_{\text{вых}}(j\omega_\tau) = \frac{1}{2\pi\dot{\alpha}_0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} X_{\text{вх}}\left(j\frac{\omega_\tau}{\dot{\alpha}_0}, j\omega_\beta\right) W\left(j\frac{\omega_\tau}{\dot{\alpha}_0}, j\omega_\beta\right) d\omega_\beta. \quad (245)$$

Зная спектр, можно найти и другие характеристики выходного светового сигнала.

Автокорреляционная функция его определяется формулой

$$R_{x_{\text{вых}}}(\tau) = \lim_{t_1 \to \infty} \frac{1}{2t_1} \int\limits_{-t_1}^{t_1} \frac{1}{2\pi}\, dt \int\limits_{-\infty}^{+\infty} X_{\text{вых}}(j\omega_\tau)\, e^{j\omega_\tau t}\, d\omega_\tau \int\limits_{-\infty}^{+\infty} X_{\text{вых}}(j\omega'_\tau) \times$$
$$\times\, e^{j\omega'_\tau (t-\tau)}\, d\omega'_\tau.$$

Спектральная плотность выходного сигнала будет равна:

$$S_{x_{\text{вых}}}(\omega_\tau) = \lim_{t_1 \to \infty} \frac{|X_{\text{вых}}(j\omega_\tau)|^2}{t_1}.$$

При решении различных задач удобнее пользоваться зависимостью, связывающей спектральные плотности входного и выходного сигналов. Двухмерная спектральная плотность выходного сигнала определяется произведением

$$S_{x_{\text{вых}}}\left(\frac{\omega_\tau}{\dot{\alpha}_0}, \omega_\beta\right) = S_{x_{\text{вх}}}\left(\frac{\omega_\tau}{\dot{\alpha}_0}, \omega_\beta\right) \left| W\left(j\frac{\omega_\tau}{\dot{\alpha}_0}, j\omega_\beta\right)\right|^2. \quad (246)$$

Интегрируя это произведение, получаем:

$$S_{x_{\text{вых}}}(\omega_\tau) = \frac{1}{2\pi\dot{\alpha}_0} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{x_{\text{вх}}}\left(\frac{\omega_\tau}{\dot{\alpha}_0}, \omega_\beta\right) \left| W\left(j\frac{\omega_\tau}{\dot{\alpha}_0}, j\omega_\beta\right)\right|^2 d\omega_\beta. \quad (247)$$

Проиллюстрируем формулу (247) решением следующих примеров.

Пример 2. Рассмотрим преобразование пространственного белого шума фильтром с поступательно перемещающейся по оси α весовой функцией колокольной формы. Двухмерная спектральная плотность выходного сигнала в этом случае равна:

$$S_{x_{\text{вых}}}\left(\frac{\omega_\tau}{\dot{\alpha}_0}, \omega_\nu\right) = D_{x_{\text{вх}}} e^{-\frac{r_1^2}{2\rho_1^2}\left(\frac{\omega_\tau^2}{\dot{\alpha}_0^2} + \omega_\nu^2\right)}.$$

Проинтегрируем ее по частоте ω_ν

$$S_{x_{\text{вых}}}(\omega_\tau) = \frac{D_{x_{\text{вх}}}}{2\pi\dot{\alpha}_0} e^{-\frac{r_1^2}{2\rho_1^2\dot{\alpha}_0^2}\omega_\tau^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{r_1^2}{2\rho_1^2}\omega_\nu^2} d\omega_\nu.$$

Вычисляя интеграл, имеем:

$$S_{x_{\text{вых}}}(\omega_\tau) = \frac{D_{x_{\text{вх}}}\rho_1}{\sqrt{2\pi} r_1 \dot{\alpha}_0} e^{-\frac{r_1^2}{2\rho_1^2\dot{\alpha}_0^2}\omega_\tau^2}. \quad (248)$$

Дисперсия выходного сигнала будет:

$$D_{x_{\text{вых}}} = \frac{1}{2\pi} \frac{D_{x_{\text{вх}}}\rho_1}{\sqrt{2\pi} r_1 \dot{\alpha}_0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{r_1^2}{2\rho_1^2\dot{\alpha}_0^2}\omega_\tau^2} d\omega_\tau.$$

Интегрируя это выражение, получим:

$$D_{x_{\text{вых}}} = D_{x_{\text{вх}}} \frac{\rho_1^2}{2\pi r_1^2}. \quad (249)$$

Пример 3. Определим характеристики выходного сигнала при преобразовании пространственного белого шума фильтром с прямоугольной весовой функцией, поступательно перемещающейся вдоль координаты μ.

Двухмерная спектральная плотность выходного сигнала в этом случае равна:

$$S_{x_{\text{вых}}}\left(\frac{\omega_\tau}{\dot{\alpha}_0}, \omega_\nu\right) = \frac{16 D_{x_{\text{вх}}}}{\frac{\omega_\tau^2}{\dot{\alpha}_0^2}\omega_\nu^2} \sin^2 \frac{\omega_\tau}{\dot{\alpha}_0}\frac{\alpha_1}{2} \sin^2 \omega_\nu \frac{\beta_1}{2}.$$

Одномерная спектральная плотность выходного сигнала определяется интегралом

$$S_{x_{\text{вых}}}(\omega_\tau) = \frac{16D_{x_{\text{вх}}}}{2\pi\dot{\alpha}_0 \frac{\omega_\tau^2}{\dot{\alpha}_0^2}} \sin^2 \frac{\omega_\tau}{\dot{\alpha}_0} \frac{\alpha_1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\omega_\nu^2} \sin^2 \omega_\nu \frac{\beta_1}{2} d\omega_\nu.$$

Вычисляя его, имеем:

$$S_{x_{\text{вых}}}(\omega_\tau) = 4D_{x_{\text{вх}}}\dot{\alpha}_0\beta_1 \frac{\sin^2 \frac{\omega_\tau}{\dot{\alpha}_0} \frac{\alpha_1}{2}}{\omega_\tau^2}. \tag{250}$$

Чтобы найти дисперсию выходного сигнала, проинтегрируем спектральную плотность по переменной ω_τ:

$$D_{x_{\text{вых}}} = \frac{4D_{x_{\text{вх}}}\dot{\alpha}_0\beta_1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\omega_\tau^2} \sin^2 \frac{\omega_\tau}{\dot{\alpha}_0} \frac{\alpha_1}{2} d\omega_\tau.$$

Вычисляя этот интеграл, получаем:

$$D_{x_{\text{вых}}} = D_{x_{\text{вх}}}\alpha_1\beta_1. \tag{251}$$

Из полученной формулы следует, что дисперсия выходного сигнала постоянна и пропорциональна площади, на которой весовая функция фильтра отлична от нуля.

32. Характеристики световых помех

При прохождении светового сигнала от источника к приемному устройству в естественных условиях может наблюдаться ослабление его и рассеивание света на частицах дождя, снега, тумана и пыли, находящихся в атмосфере во взвешенном состоянии.

Если световой сигнал излучается точечным источником A и воспринимается приемным устройством B (рис. 41), то причинами световых помех являются:

фотонный шум, являющийся следствием дискретной природы света;

случайные флуктуации количества частиц в телесном угле Ω_1, вследствие чего возникает случайное ослабление светового сигнала, идущего от источника A к приемному устройству;

случайные отражения полезного светового сигнала или светового потока от посторонних естественных и искусственных источников (Солнца, Луны, прожекторов и т. д.) от частиц, появляющихся в поле зрения приемного устройства, определяемом телесным углом Ω_2.

Рассмотрим сначала характеристики фотонного шума. Если на приемник излучения падает монохроматический световой поток Φ, состоящий из фотонов одной частоты ν, то спектральная плотность шума, вызванного этим потоком, определяется формулой [13, 39]

$$S_\Phi(\nu) = \frac{2h\nu\Phi}{1 - e^{-\frac{h\nu}{KT}}}, \tag{252}$$

где h — постоянная Планка;

K — постоянная Больцмана;
T — абсолютная температура.

Случайная помеха, являющаяся следствием ослабления модулированного полезного сигнала, имеет вид:

$$\Phi_{\text{п}}(t) = \Phi_m \left[k_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} k_i(\omega_{\tau i}) \cos(\omega_{\tau i} t + \psi_i) \right], \qquad (253)$$

где $k_i(\omega_{\tau i})$ — коэффициенты модуляции гармоник сигнала;
k_0 — постоянная составляющая;
Φ_m — амплитуда сигнала.

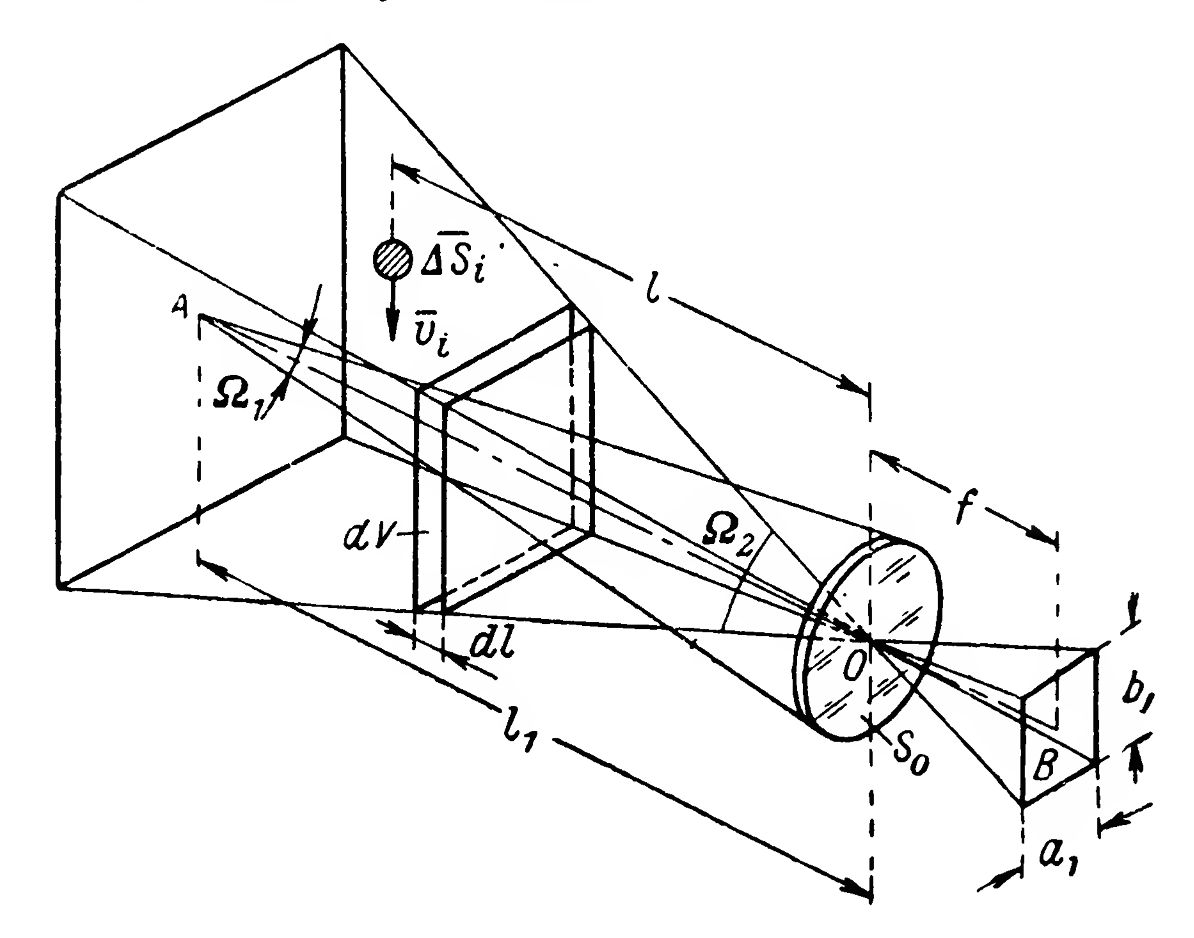


Рис. 41. Схема для определения характеристик световых помех.

Если обозначить $x = x(t)$ случайную функцию ослабления полезного сигнала, то случайный сигнал будет равен произведению

$$\Phi(t) = \Phi_m x(t) \left[k_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} k_i(\omega_{\tau i}) \cos(\omega_{\tau i} t + \psi_i) \right].$$

Автокорреляционная функция сигнала будет:

$$R_\Phi(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \Phi_m^2 \int_0^T x(t) \left[k_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} k_i(\omega_{\tau i}) \times \right.$$

$$\left. \times \cos(\omega_{\tau i} t + \psi_i) \right] x(t+\tau) \left\{ k_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} k_i(\omega_{\tau i}) \times \right.$$

$$\left. \times \cos[\omega_{\tau i}(t+\tau) + \psi_i] \right\} dt.$$

Интегрируя это выражение, имеем:

$$R_\Phi(\tau) = \Phi_m^2 R_x(\tau)\left[k_0^2 + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\infty} k_i^2(\omega_{\tau i})\cos\omega_{\tau i}\tau\right], \tag{254}$$

где

$$R_x(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,x(t+\tau)\,dt$$

— междупериодная функция корреляции, характеризующая связь между значениями случайного сигнала в моменты времени t, $t\pm T$, $t\pm 2T$, $t\pm 3T$ и т. д.

Спектральная плотность сигнала равна:

$$S_\Phi(\omega_\tau) = \Phi_m^2\int_{-\infty}^{+\infty}\left[k_0^2 + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\infty} k_i^2(\omega_{\tau i})\cos\omega_{\tau i}\tau\right]R_x(\tau)\,e^{-j\omega_\tau\tau}\,d\tau.$$

Меняя знаки суммы и интеграла местами и заменяя косинус экспоненциальными функциями, получаем:

$$S_\Phi(\omega_\tau) = \Phi_m^2\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} k_0^2 R_x(\tau)\,e^{-j\omega_\tau\tau}\,d\tau + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{\infty} k_i^2(\omega_{\tau i})\int_{-\infty}^{+\infty}\left[e^{-j(\omega_\tau-\omega_{\tau i})\tau} + e^{-j(\omega_\tau+\omega_{\tau i})\tau}\right]R_x(\tau)\,d\tau\right\}.$$

Вводя обозначение

$$S_x(\omega_\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau)\,e^{-j\omega_\tau\tau}\,d\tau,$$

имеем:

$$S_\Phi(\omega_\tau) = \Phi_m^2\left\{k_0^2 S_x(\omega_\tau) + \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{\infty} k_i^2(\omega_{\tau i})\times\right.$$

$$\left.\times\left[S_x(\omega_\tau-\omega_{\tau i}) + S_x(\omega_\tau+\omega_{\tau i})\right]\right\}. \tag{255}$$

Из полученного выражения следует, что спектр периодического сигнала, сосредоточенный в фиксированных частотах $\omega_\tau = \pm i\omega_{\tau_1}$, переходит в непрерывный спектр.

Полагая

$$R_x(\tau) = D_x e^{-\alpha_\tau|\tau|}, \tag{256}$$

находим, что спектральная плотность случайного сигнала будет:

$$S_{\Phi}(\omega_{\tau}) = \Phi_m^2 D_x \left\{ \frac{k_0^2 \alpha_{\tau}}{\omega_{\tau}^2 + \alpha_{\tau}^2} + \frac{1}{8} \sum_{i=1}^{\infty} k_i^2 (\omega_{\tau i}) \times \right.$$

$$\left. \times \left[\frac{\alpha_{\tau}}{(\omega_{\tau} - \omega_{\tau i})^2 + \alpha_{\tau}^2} + \frac{\alpha_{\tau}}{(\omega_{\tau} + \omega_{\tau i})^2 + \alpha_{\tau}^2} \right] \right\}. \qquad (257)$$

Определим теперь характеристики помехи, возникающей при отражении постоянного светового потока от частиц, появляющихся в поле зрения приемного устройства. При этом будем полагать, что частицы движутся с постоянной скоростью перпендикулярно визирной оси.

Полагая частицы точечными источниками сигнала, а весовую функцию анализатора — прямоугольной, найдем форму выходных элементарных сигналов. Если $\dot{\beta}_0$ — скорость перемещения частицы, то спектр элементарного сигнала будет:

$$\Delta F_0 (j\omega_{\alpha}, j\omega_{\beta}, t) = \Delta\Phi e^{j\omega_{\beta} \dot{\beta}_0 t}.$$

Спектр выходного сигнала равен:

$$\Delta F_1 (j\omega_{\alpha}, j\omega_{\beta}, t) = \frac{4\Delta\Phi}{\omega_{\alpha}\omega_{\beta}} \sin \omega_{\alpha} \frac{\alpha_1}{2} \sin \omega_{\beta} \frac{\beta_1}{2} e^{j\omega_{\beta} \dot{\beta}_0 t}.$$

Форма выходного сигнала определяется интегралом

$$\Delta f_1 (t) = \frac{4\Delta\Phi}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\omega_{\alpha}\omega_{\beta}} \sin \omega_{\alpha} \frac{\alpha_1}{2} \times$$

$$\times \sin \omega_{\beta} \frac{\beta_1}{2} e^{j\omega_{\beta} \dot{\beta}_0 t} d\omega_{\alpha} d\omega_{\beta}.$$

Заменяя синусы экспоненциальными функциями, получим:

$$\Delta f_1 (t) = \frac{\Delta\Phi}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\omega_{\alpha}} \left(e^{j\omega_{\alpha} \frac{\alpha_1}{2}} - e^{-j\omega_{\alpha} \frac{\alpha_1}{2}} \right) d\omega_{\alpha} \times$$

$$\times \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\omega_{\beta}} \left[e^{j\omega_{\beta} \left(\dot{\beta}_0 t + \frac{\beta_1}{2} \right)} - e^{-j\omega_{\beta} \left(\dot{\beta}_0 t - \frac{\beta_1}{2} \right)} \right] d\omega_{\beta}.$$

Первый из интегралов равен единице, а второй представляет собой прямоугольный импульс, поэтому, выходной сигнал будет:

$$\Delta f_1 (t) = \begin{cases} \Delta\Phi \text{ при } -\frac{\beta_1}{2\dot{\beta}_0} < t < \frac{\beta_1}{2\dot{\beta}_0}; \\ 0 \text{ при } t < -\frac{\beta_1}{2\dot{\beta}_0} \text{ и } t > \frac{\beta_1}{2\dot{\beta}_0}. \end{cases} \qquad (258)$$

Начало отсчета времени при этом совпадает с моментом прохождения частицы через визирную ось.

Если частицы являются диффузно рассеивающими, то амплитуда светового сигнала от каждой частицы, попадающей в поле зрения, будет:

$$\Delta\Phi_i = \frac{E}{\pi}\Delta S_i \frac{S_0}{l^2} e^{-\int\limits_0^l \lambda dl'}, \tag{259}$$

где E — освещенность;

S_0 — площадь объектива;

ΔS_i — площадь сечения частицы;

l — расстояние от частицы до приемного устройства;

λ — коэффициент поглощения света на единицу длины.

Таким образом, элементарный прямоугольный импульс равен:

$$\Delta f_i(t) = \begin{cases} \frac{E}{\pi}\Delta S_i \frac{S_0}{l^2} e^{-\int\limits_0^l \lambda dl'} & \text{при } 0 < t < t_i; \\ 0 \text{ при } t < 0 \text{ и } t > t_i, \end{cases} \tag{260}$$

где $t_i = \beta_1/\dot{\beta}_{0i}$ — длительность импульса.

Если ввести v_i — линейную скорость движения частицы, то длительность импульса равна:

$$t_i = \frac{lb_1}{fv_i}, \tag{261}$$

где f — фокусное расстояние;

b_1 — линейный размер отверстия в диафрагме анализатора.

Вероятность появления n прямоугольных импульсов в единице объема поля зрения V за промежуток времени t определяется законом Пуассона

$$P_n(t) = e^{-\bar{n}} \frac{(\bar{n})^n}{n!}, \tag{262}$$

где $\bar{n} = n_0 Vt$ — математическое ожидание числа импульсов;

n_0 — среднее число импульсов, появляющихся за единицу времени в единице объема.

Математическое ожидание помехи от частиц, появляющихся в элементарном объеме поля зрения dV, равно:

$$\overline{d\Phi(t)} = n_0 dV \int\limits_0^\infty \Delta f_i(t)\, dt.$$

Подставляя сюда значение подынтегральной функции и производя интегрирование, получаем:

$$\overline{d\Phi(t)} = n_0 \frac{E}{\pi} \overline{\Delta S_i} \frac{S_0 b_1}{l f \overline{v_i}} e^{-\int\limits_0^l \lambda dl'} dV,$$

где $\overline{\Delta S_i}$ и $\overline{v_i}$ — математические ожидания сечений и скоростей частиц.

Элементарный объем поля зрения равен:

$$dV = \frac{a_1 b_1 l}{f} dl,$$

поэтому

$$\overline{d\Phi(t)} = n_0 \frac{E}{\pi} \overline{\Delta S_i} S_0 \frac{a_1 b_1^2}{f^2 \overline{v_i}} e^{-\int\limits_0^l \lambda dl'} dl. \tag{263}$$

Полагая $\lambda = \text{const}$, интегрируем полученное выражение в пределах от l_0 до l_1:

$$\overline{\Phi(t)} = n_0 \frac{E}{\pi} \overline{\Delta S_i} S_0 \frac{a_1 b_1^2}{f^2 \overline{v_i} \lambda} (e^{-\lambda l_0} - e^{-\lambda l_1}). \tag{264}$$

Найдем теперь дисперсию помехи. Для элементарного объема поля зрения она выражается формулой

$$\overline{d\Phi^2(t)} = n_0 dV \int\limits_0^\infty [\Delta f_i(t)]^2 dt.$$

Подставляя сюда подынтегральное выражение, имеем:

$$\overline{d\Phi^2(t)} = n_0 \frac{E^2}{\pi^2} \overline{\Delta S_i^2} \frac{S_0^2 a_1 b_1^2}{l^2 f^2 \overline{v_i}} e^{-2\lambda l} dl. \tag{265}$$

Интегрируя это выражение по переменной l, получаем:

$$\overline{\Phi^2(t)} = n_0 \frac{E^2}{\pi^2} \overline{\Delta S_i^2} \frac{S_0^2 a_1 b_1^2}{f^2 \overline{v_i}} \left[\frac{1}{l_0} e^{-2\lambda l_0} - \frac{1}{l_1} e^{-2\lambda l_1} + \right.$$

$$\left. + 2\lambda E_i(-2\lambda l_0) - 2\lambda E_i(-2\lambda l_1) \right], \tag{266}$$

где

$$E_i(-2\lambda l) = \int\limits_0^l \frac{1}{l} e^{-2\lambda l} dl$$ — табличная функция.

Автокорреляционная функция помехи выражается зависимостью

$$dR_\Phi(\tau) = \begin{cases} \overline{d\Phi^2(t)} \left(1 - \dfrac{|\tau|}{\dfrac{lb_1}{f\overline{v_i}}} \right) & \text{при } |\tau| < \dfrac{lb_1}{f\overline{v_i}}; \\ 0 & \text{при } |\tau| > \dfrac{lb_1}{f\overline{v_i}}. \end{cases} \tag{267}$$

Подставляя сюда значение дисперсии, имеем:

$$dR_{\Phi}(\tau) = n_0 \frac{E^2}{\pi^2} \overline{\Delta S_i^2}\, S_0 \frac{a_1 b_1^2}{f^2 \overline{v_i}} \left(\frac{1}{l^2} e^{-2\lambda l} dl - \frac{|\tau|}{\frac{b_1}{f\overline{v_i}}} \frac{1}{l^3} e^{-2\lambda l} dl \right).$$

Интегрируя это выражение, получаем:

$$R_{\Phi}(\tau) = n_0 \frac{E^2}{\pi^2} \overline{\Delta S_i^2} S_0^2 \frac{a_1 b_1^2}{f^2 \overline{v_i}} \left\{ \frac{1}{l_0} e^{-2\lambda l_0} - \frac{1}{l_1} e^{-2\lambda l_1} + \right.$$

$$+ 2\lambda E_i(-2\lambda l_0) - 2\lambda E_i(-2\lambda l_1) - \frac{|\tau|}{\frac{b_1}{f\overline{v_i}}} \left[\frac{1}{2l_0^2} e^{-2\lambda l_0} - \frac{1}{2l_1^2} e^{-2\lambda l_1} + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{\lambda}{l_1} e^{-2\lambda l_1} - \frac{\lambda}{l_0} e^{-2\lambda l_0} + 2\lambda^2 E_i(-2\lambda l_1) - 2\lambda^2 E_i(-2\lambda l_0) \right] \right\}. \qquad (268)$$

Полученная линейная зависимость справедлива при $|\tau| < l_0 b_1 / f\overline{v_i}$. На участке $t_0 < |\tau| < t_1$ при определении автокорреляционной функции необходимо учитывать только положительные значения элементарных составляющих автокорреляционной функции (см. рис. 42,*а*),

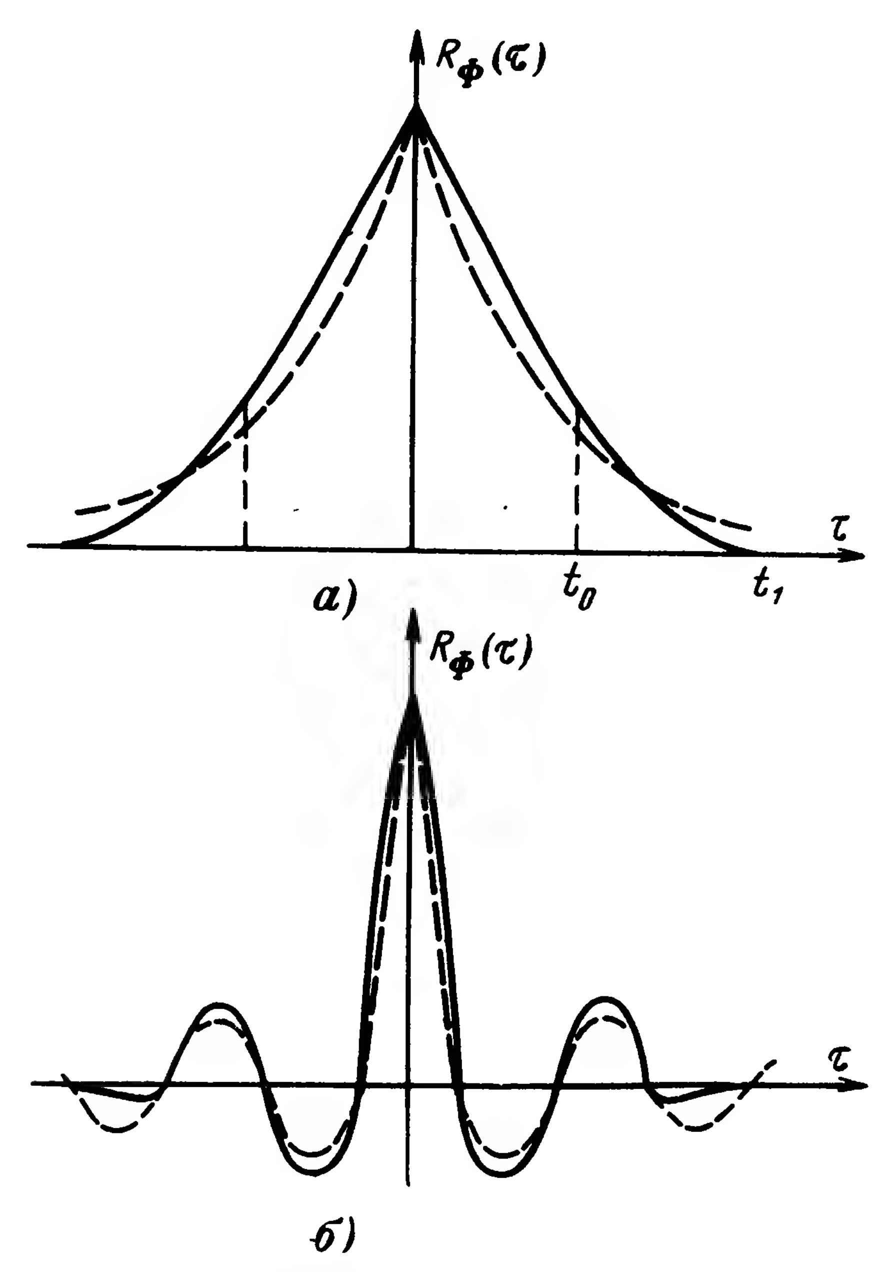


Рис. 42. Автокорреляционные функции.

а — немодулированной помехи; *б* — модулированной помехи.

поэтому ее зависимость от τ будет более сложной. На участке $|\tau|>l_1 b_1/f\overline{v}_i$ автокорреляционная функция равна нулю.

Полученную зависимость можно аппроксимировать выражением

$$R_\Phi(\tau)=\overline{\Phi^2(t)}\,e^{-\alpha_\tau|\tau|}. \qquad (269)$$

Значение коэффициента затухания корреляционной связи может быть найдено из условия прохождения аппроксимирующей функции (обозначена пунктиром) через точки R_Φ (0) и $R_\Phi(t_0)$, тогда

$$\alpha_\tau=\frac{\ln\overline{\Phi^2(t)}-\ln R_\Phi(t_0)}{t_0}. \qquad (270)$$

Спектральная плотность, соответствующая аппроксимирующей автокорреляционной функции, равна:

$$S_\Phi(\omega_\tau)=\overline{\Phi^2(t)}\frac{4\alpha_\tau}{\omega_\tau^2+\alpha_\tau^2}. \qquad (271)$$

При уменьшении поля зрения приемного устройства сокращается время пролета частиц в поле зрения t_0, поэтому возрастает коэффициент затухания корреляционной связи α_τ.

При увеличении коэффициента α_τ спектральная плотность $S_\Phi(\omega_\tau)$ стремится к постоянному значению, т. е. характеристики помехи приближаются к характеристикам белого шума.

Найдем теперь характеристики помехи, возникающей при облучении частиц, появляющихся в поле зрения приемного устройства, модулированным световым потоком.

Случайный сигнал в данном случае можно представить в виде произведения

$$f(t)=x(t)\left[k_0+\frac{1}{2}k_1\cos(\omega_{\tau 0}t+\psi_0)\right], \qquad (272)$$

где $x(t)$ — случайный процесс, представляющий собой наложение импульсов прямоугольной формы.

Автокорреляционная функция его определяется интегралом

$$R_\Phi(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\left[k_0+\frac{1}{2}k_1\cos(\omega_{\tau 0}t+\psi_0)\right]x(t+\tau)\times$$

$$\times\left\{k_0+\frac{1}{2}k_1\cos[\omega_{\tau_0}(t+\tau)+\psi_0]\right\}dt.$$

Интегрируя это выражение, получаем:

$$R_\Phi(\tau)=R_x(\tau)\left(k_0^2+\frac{1}{4}k_1^2\cos\omega_{\tau_0}\tau\right). \qquad (273)$$

Значение автокорреляционной функции $R_x(\tau)$ было найдено ранее [см. формулу (268)].

Аппроксимируя автокорреляционную функцию $R_x(\tau)$ выражением

$$R_x(\tau) = \overline{\Phi^2(t)}\, e^{-\alpha_\tau |\tau|},$$

получаем:

$$R_\Phi(\tau) = \overline{\Phi^2(t)} e^{-\alpha_\tau |\tau|} \left(k_0^2 + \frac{1}{4} k_1^2 \cos \omega_{\tau 0} \tau\right). \qquad (274)$$

Эта функция изображена на рис. 42,*б* пунктиром. Реальная автокорреляционная функция этой помехи изображена на этом рисунке сплошной линией.

Спектральная плотность, соответствующая аппроксимирующей автокорреляционной функции, определяется следующим выражением:

$$S_\Phi(\omega_\tau) = \overline{\Phi^2(t)} \left\{ k_0^2 \frac{4\alpha_\tau}{\omega_\tau^2 + \alpha_\tau^2} + k_1^2 \frac{\omega_\tau^2 + \omega_{\tau 0}^2 + \alpha_\tau^2}{(\omega_\tau^2 - \omega_{\tau 0}^2 - \alpha_\tau^2)^2 + 4\alpha_\tau^2 \omega_\tau^2} \right\}. \qquad (275)$$

Для того чтобы вычислить характеристики световых помех, вызываемых появлением частиц в поле зрения приемного устройства, необходимо знать статистические характеристики этих частиц: математическое ожидание и дисперсию поперечных сечений; математическое ожидание скоростей падения; среднее число частиц, появляющихся в единицу времени в единице объема поля зрения.

33. Характеристики случайных механических возмущений

Основания, на которых устанавливаются элементы следящих систем с оптическими связями, обладают упругостью. При действии на основание случайных вибраций от работающих агрегатов и двигателей эти возмущения передаются через упругое основание на измерительное устройство следящей системы или объект регулирования.

Вибрации относятся к случайным процессам, которые можно представить в виде ряда Фурье со случайными фазами и амплитудами, являющимися функциями времени:

$$z(t) = x(t) \left[a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos(\omega_{\tau i} t + \psi_i) \right]. \qquad (276)$$

Автокорреляционная функция и спектральная плотность рассматриваемого случайного процесса равны:

$$R_z(\tau) = R_x(\tau) \left(a_0^2 + \sum_{i=1} a_i^2 \cos \omega_{\tau i} \tau \right); \qquad (277)$$

$$S_z(\tau) = a_0^2 S_x(\omega_\tau) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \left[S_x(\omega_\tau - \omega_{\tau i}) + S_x(\omega_\tau + \omega_{\tau i}) \right]. \qquad (278)$$

В частном случае, когда амплитуды гармоник являются случайными величинами, получим:

$$R_z(\tau) = a_0^2 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \cos \omega_{\tau i}\tau; \quad (279)$$

$$S_z(\omega_\tau) = a_0^2\delta(\omega_\tau) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 [\delta(\omega_\tau - \omega_{\tau i}) + \delta(\omega_\tau + \omega_{\tau i})]. \quad (280)$$

Спектральная плотность здесь представляет собой дискретный ряд частот.

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний основания измерительного устройства при приложении к нему вибрационных возмущений имеет вид:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + c\frac{dy}{dt} + ky = z(t), \quad (281)$$

где m — масса;

c — коэффициент демпфирования;

k — коэффициент жесткости.

Частотная характеристика такой механической системы будет:

$$W(j\omega_\tau) = \frac{\frac{1}{k}}{\frac{(j\omega_\tau)^2}{\omega_{\tau 0}^2} + 2j\omega_\tau\frac{\xi_0}{\omega_{\tau 0}} + 1}, \quad (282)$$

где $\omega_{\tau 0} = \sqrt{\frac{k}{m}}$ — собственная частота колебаний основания;

$\xi_0 = \frac{c}{2\sqrt{km}}$ — относительный коэффициент демпфирования.

Поэтому спектральная плотность колебаний основания в установившемся режиме имеет следующий вид:

$$S_y(\omega_\tau) = \frac{1}{k^2}\frac{1}{\left(1 - \frac{\omega_\tau^2}{\omega_{\tau 0}^2}\right)^2 + \frac{4\omega_\tau^2\xi_0^2}{\omega_{\tau 0}^2}}\left\{a_0^2 S_x(\omega_\tau) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 [S_x(\omega_\tau - \omega_{\tau i}) + S_x(\omega_\tau + \omega_{\tau i})]\right\}. \quad (283)$$

Из полученного выражения следует, что спектральная плотность колебаний основания имеет максимальное значение на резонансной частоте ω_{τ_0}.

34. Внутренние шумы следящих систем

Основными источниками внутренних шумов следящих систем являются помехи, возникающие в приемнике излучения, активных сопротивлениях и лампах усилителя. В зависимости от физической

природы внутренние помехи можно разделить на: тепловой, дробовой, генерационно-рекомбинационный и токовый шумы.

Причиной теплового шума является беспорядочное движение заряженных частиц в проводниках. Он наблюдается даже в том случае, когда через проводник не протекает ток. Спектральная плотность теплового шума определяется формулой Найквиста

$$S_u(\omega_\tau) = 2\frac{K}{\pi}TR, \tag{284}$$

где R — сопротивление проводника;

T — его температура.

Дробовой шум является следствием дискретной природы электрического тока. Он возникает в вакуумных приемниках излучения и электронных лампах. Спектральная плотность дробового шума определяется формулой Шоттки

$$S_i(\omega_\tau) = \frac{ei_0}{\pi}, \tag{285}$$

где e — заряд электрона;

i_0 — средний ток, протекающий через приемник излучения или лампу.

Формула Шоттки справедлива для тех условий, когда диод или вакуумный приемник излучения работают в режиме насыщения. Для других режимов работы спектральная плотность равна:

$$S_i(\omega_\tau) = \frac{ei_0\gamma^2}{\pi}, \tag{286}$$

где γ — множитель, зависящий от рабочих условий и изменяющийся в пределах от 0,1 до 1.

Для многоэлектродных ламп спектральная плотность дробового шума будет:

$$S_i(\omega_\tau) = \frac{ei_0}{\pi}\left(\frac{i_э + \gamma^2 i_а}{i_э + i_а}\right). \tag{287}$$

Полагая в этой формуле $\gamma = 1$ и $i_э = 0$, получаем формулу Шоттки.

Генерационно-рекомбинационный шум наблюдается только у полупроводниковых приемников излучения. Он вызывается флуктуациями числа и времени жизни носителей заряда (электронов и дырок).

Спектральная плотность генерационно-рекомбинационного шума определяется следующей формулой:

$$S_u(\omega_\tau) = \sqrt{\frac{2\tau_1 n}{1 + \omega_\tau^2\tau_1^2}\,\frac{u_п e v}{2\pi}}, \tag{288}$$

где τ_1 — среднее время жизни носителей;

n — число носителей в зоне проводимости;

$u_п$ — напряжение на электродах приемника;

v — подвижность носителей заряда.

Для уменьшения этого шума необходимо охлаждать приемник излучения. При этом уменьшается число носителей заряда в полупроводнике, а подвижность носителей и время их жизни меняются незначительно.

Причины токового шума исследованы недостаточно. Большинство исследователей полагают, что он вызывается захватом носителей заряда на особые энергетические уровни, связанные с нару-

шением регулярной кристаллической структуры материала приемника. При этом диапазон времени жизни носителей заряда весьма широк, поэтому наблюдается зависимость спектральной плотности токового шума от частоты.

Теоретические исследования дают следующее выражение для спектральной плотности токового шума:

$$S_u(\omega_\tau) = \frac{aR^2 i_0^2}{1 + \omega_\tau^2 \tau_1^2}, \tag{289}$$

где τ_1 — среднее время жизни носителей заряда;

a — некоторая постоянная, зависящая от материала полупроводника и его размеров.

Теоретическая формула не всегда согласуется с экспериментами. На основе обработки экспериментальных исследований получена следующая формула для спектральной плотности:

$$S_u(\omega_\tau) = \frac{bR^2 i_0^x}{\omega_\tau^y}, \tag{290}$$

где b — постоянная, зависящая от тех же факторов, что и постоянная a;

$x = 1{,}5 \div 3$;

$y = 0{,}6 \div 2$.

Эксперименты также показали существенную зависимость спектральной плотности токового шума от технологии производства приемников излучения.

Наибольшая величина токового шума наблюдается у фоторезисторов, фотодиодов и фототриодов. В вакуумных приемниках излучения и электронных лампах токовый шум не наблюдается.

Глава седьмая

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА СЛЕДЯЩИХ СИСТЕМ С ОПТИЧЕСКИМИ СВЯЗЯМИ

35. Прохождение помех через линейную систему с оптическими связями

В зависимости от физической природы помехи могут быть приложены к различным точкам следящей системы. На рис. 43 показаны места приложения различных помех к типовой следящей системе. В изображенной на рисунке схеме анализатор является линейным элементом. Такое допущение справедливо только для фотоэлектрических измерительных устройств с ограниченной зоной линейности статической характеристики при весьма малых возмущениях, не выходящих за пределы этой зоны.

Механические возмущения могут быть приложены в трех точках: на входе системы, после суммирующего элемента обратной связи и на выходе системы. Если следящая система служит для измерения углового положения объекта, то возмущение $\alpha_{п1}(t)$ приложено к измерительному устройству, $\alpha_{п2}(t)$ — непосредственно к анализатору, а $\alpha_{п3}(t)$ — к измеряемому объекту.

Световые помехи могут быть приложены в двух точках: на входе приемника излучения и непосредственно к анализатору. Помеха $\Phi_{п1}(t)$ приложена к анализатору в том случае, когда весовая функция анализатора меняется с течением времени

$$w = w(\alpha, \beta, t).$$

Внутренние шумы элементов следящей системы могут быть приложены ко входу усилителя или к одному из его каскадов. Если источником шума $u_{п1}(t)$ является приемник излучения или входная цепь усилителя, то такая помеха приложена на входе усилителя. Шумы ламп усилителя приложены к каждому последующему каскаду усилителя.

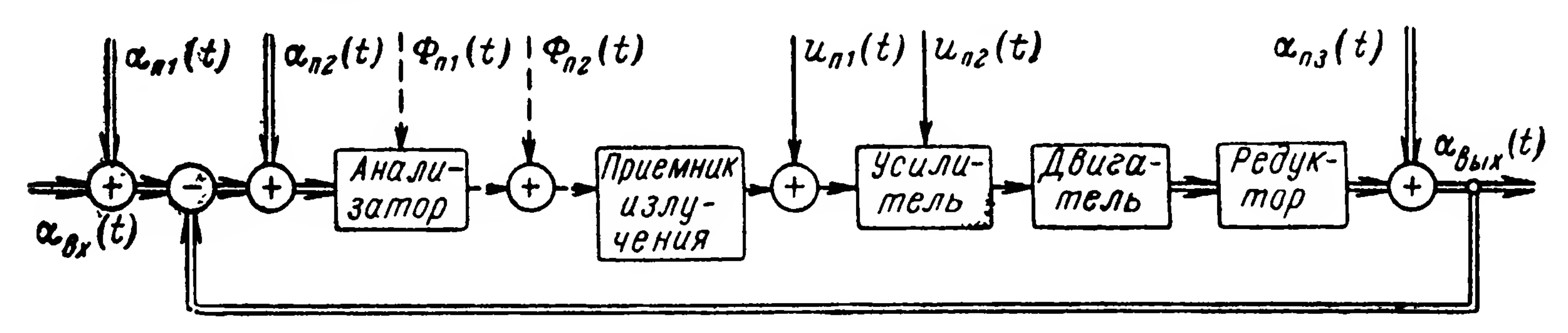


Рис. 43. Схема точек приложения случайных возмущений.

Спектральная плотность ошибки на выходе следящей системы равна произведению

$$S_{п2}(\omega_\tau) = |W_п(j\omega_\tau)|^2 S_{п1}(\omega_\tau), \tag{291}$$

где $S_{п1}(\omega_\tau)$ — спектральная плотность входной помехи:

$W_п(j\omega_\tau)$ — частотная характеристика системы для точки приложения возмущения.

Частотные характеристики следящей системы для различных точек приложения помех, указанных на рис. 43, имеют следующий вид:

$$W_{\alpha_{п1}}(j\omega) = \frac{k_1 k_2 k_3 k_д k_р}{j\omega t(j\omega t\tau_1 + 1)(j\omega t\tau_2 + 1) + k_1 k_2 k_3 k_д k_р}; \tag{292}$$

$$W_{\Phi_{п2}}(j\omega t) \frac{k_2 k_3 k_д k_р}{j\omega t(j\omega t\tau_1 + 1)(j\omega t\tau_2 + 1) + k_1 k_2 k_3 k_д k_р}; \tag{293}$$

$$W_{u_{п1}}(j\omega t) = \frac{k_3 k_д k_р (j\omega t\tau_1 + 1)}{j\omega t(j\omega t\tau_1 + 1)(j\omega t\tau_2 + 1) + k_1 k_2 k_3 k_д k_р}; \tag{294}$$

$$W_{\alpha_{п3}}(j\omega t) = \frac{j\omega t(j\omega t\tau_1 + 1)(j\omega t\tau_2 + 1)}{j\omega t(j\omega t\tau_1 + 1)(j\omega t\tau_2 + 1) + k_1 k_2 k_3 k_д k_р}. \tag{295}$$

Частотные характеристики системы для возмущений $\alpha_{п1}(t)$ и $\alpha_{п2}(t)$ равны друг другу:

$$W_{\alpha_{п1}}(j\omega t) = W_{\alpha_{п2}}(j\omega t).$$

Проиллюстрируем формулу (291) решением следующих примеров.

Пример 1. Найдем характеристики помехи на выходе следящей системы, если на ее входе приложено случайное механическое возмущение со спектральной плотностью

$$S_{\alpha_{\text{п1}}}(\omega_\tau)=\frac{\frac{1}{k^2}\left\{a_0^2\delta(\omega_\tau)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n}a_i^2\left[\delta(\omega_\tau-\omega_{\tau i})+\delta(\omega_\tau+\omega_{\tau i})\right]\right\}}{\left(1-\frac{\omega_\tau^2}{\omega_{\tau 0}^2}\right)^2+\frac{4\xi_0^2\omega_\tau^2}{\omega_{\tau 0}^2}},$$

[см. формулы (280) и (283)].

Частотная характеристика системы для такого возмущения определяется формулой (292), поэтому спектральная плотность случайного сигнала на выходе следящей системы будет:

$$S_{\alpha_{\text{вых}}}(\omega_\tau)=$$

$$=\frac{\left(\frac{k'}{k}\right)^2\left\{a_0^2\delta(\omega_\tau)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n}a_i^2[\delta(\omega_\tau-\omega_{\tau i})+\delta(\omega_\tau+\omega_{\tau i})]\right\}}{\left[\left(1-\frac{\omega_\tau^2}{\omega_{\tau 0}^2}\right)^2+\frac{4\xi_0^2\omega_\tau^2}{\omega_{\tau 0}^2}\right]\{[k'-\omega_\tau^2(\tau_1+\tau_2)]^2+(\omega_\tau-\omega_\tau^3\tau_1\tau_2)^2\}}, \quad (296)$$

где $k'=k_1k_2k_3k_{\text{д}}k_{\text{р}}$.

Ошибка следящей системы определяется дисперсией случайного сигнала на ее выходе. Для нахождения дисперсии необходимо проинтегрировать спектральную плотность

$$D_{\alpha_{\text{вых}}}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\times$$

$$\times\frac{\left(\frac{k'}{k}\right)^2\left\{a_0^2\delta(\omega_\tau)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n}a_i^2[\delta(\omega_\tau-\omega_{\tau i})+\delta(\omega_\tau+\omega_{\tau i})]\right\}}{\left[\left(1-\frac{\omega_\tau^2}{\omega_{\tau 0}^2}\right)^2+\frac{4\xi_0^2\omega_\tau^2}{\omega_{\tau 0}^2}\right]\{[k'-\omega_\tau^2(\tau_1+\tau_2)]^2+(\omega_\tau-\omega_\tau^3\tau_1\tau_2)^2\}}\,d\omega_\tau.$$

Интегрируя это выражение, получаем:

$$D_{\alpha_{\text{вых}}}=\frac{1}{2\pi}\left\langle\frac{a_0^2}{k^2}+\frac{(k')^2}{k^2}\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{i=1}^{i=n}\frac{a_i^2}{\left[\left(1-\frac{\omega_{ri}^2}{\omega_{r0}^2}\right)^2+\frac{4\xi_0^2\omega_{\tau i}^2}{\omega_{\tau 0}^2}\right]\{[k'-\omega_{\tau i}^2(\tau_1+\tau_2)]^2+(\omega_{\tau i}-\omega_{\tau i}^3\tau_1\tau_2)^2\}}\right\rangle.$$

(297)

Если учитывать только первую гармонику случайного колебания, действующего на входе следящей системы, то спектральная плотность выходного случайного сигнала будет:

$$S_{\alpha_{\text{вых}}}(\omega_\tau)=\frac{\left(\frac{k'}{k}\right)^2\frac{a_1^2}{2}\left[\delta(\omega_\tau-\omega_{\tau 1})+\delta(\omega_\tau+\omega_{\tau 1})\right]}{\left[\left(1-\frac{\omega_\tau^2}{\omega_{\tau 0}^2}\right)^2+\frac{4\xi_0^2\,\omega_\tau^2}{\omega_{\tau 0}^2}\right]\times}\cdots\rightarrow$$

$$\leftarrow\cdots\frac{}{\times\left\{[k'-\omega_\tau^2(\tau_1+\tau_2)]^2+(\omega_\tau-\omega_\tau^3\tau_1\tau_2)^2\right\}}. \qquad (298)$$

Дисперсия выходной помехи равна:

$$D_{\alpha_{\text{вых}}}=\frac{1}{2\pi}\,\frac{\left(\frac{k'}{k}\right)^2 a_1^2}{\left[\left(1-\frac{\omega_{\tau 1}^2}{\omega_{\tau 0}^2}\right)^2+\frac{4\xi_0^2\,\omega_{\tau 1}^2}{\omega_{\tau 0}^2}\right]\times}\cdots\rightarrow$$

$$\leftarrow\cdots\frac{}{\times\left\{[k'-\omega_{\tau 1}^2(\tau_1+\tau_2)]^2+(\omega_{\tau 1}-\omega_{\tau 1}^3\tau_1\tau_2)^2\right\}}. \qquad (299)$$

Из полученного выражения следует, что дисперсия помехи на выходе следящей системы будет иметь максимальное значение при

$$\omega_{\tau 1}=\omega_{\tau 0}.$$

Пример 2. Определим дисперсию помехи на выходе системы, если на нее воздействует световая помеха, являющаяся белым шумом со спектральной плотностью

$$S_{\Phi_\text{п}}(\omega_\tau)=D_{\Phi_\text{п}}.$$

Частотная характеристика системы для световой помехи определяется формулой (293), следовательно, спектральная плотность помехи на выходе системы равна:

$$S_{\alpha_{\text{вых}}}(\omega_\tau)=\frac{D_{\Phi_\text{п}}k^2}{\left|j\omega_\tau(j\omega_\tau\tau_1+1)(j\omega_\tau\tau_2+1)+k'\right|^2}, \qquad (300)$$

где $k=k_2k_\text{э}k_\text{д}k_\text{р}$.

Дисперсия выходной помехи определяется интегралом

$$D_{\alpha_{\text{вых}}}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{D_{\Phi_\text{п}}k^2d\omega_\tau}{\left|j\omega_\tau(j\omega_\tau\tau_1+1)(j\omega_\tau\tau_2+1)+k'\right|^2}.$$

Интегрируя это выражение, получаем:

$$D_{\alpha_{\text{вых}}}=\frac{D_{\Phi_\text{п}}k^2(\tau_1+\tau_2)}{2k'(\tau_1+\tau_2-\tau_1\tau_2k')}. \qquad (301)$$

Из полученной зависимости видно, что дисперсия помехи на выходе следящей системы уменьшается с увеличением коэффициента усиления k'. Так как коэффициенты усиления k' и k различаются только сомножителем k_1, то дисперсия помехи уменьшается с увеличением коэффициента усиления анализатора k_1.

36. Выбор оптимальных параметров следящих систем с оптическими связями

Наиболее распространенным критерием оптимизации следящих систем с оптическими связями является минимум средней квадратической ошибки.

Рассмотрим сначала выбор оптимальных параметров следящей системы (коэффициента усиления, постоянных времени инерционных элементов и т. д.) при заданной частотной характеристике.

Пусть случайный полезный сигнал $m(t)$ и независимая от него помеха $n(t)$ действуют на разомкнутую систему или один из ее элементов, тогда средняя квадратическая ошибка определяется формулой

$$\overline{\varepsilon^2(\tau_i, k_i)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |W_p(j\omega_\tau, \tau_i, k_i)|^2 S_п(\omega_\tau)\, d\omega_\tau, \qquad (302)$$

где k_i — коэффициенты усиления;

τ_i — постоянные времени элементов.

Дифференцируя это выражение по любому из параметров и приравнивая его нулю, находим его оптимальное значение, соответствующее минимуму средней квадратической ошибки (если он существует).

Если рассматривается замкнутая следящая система, то средняя квадратическая ошибка на ее выходе равна:

$$\overline{\varepsilon^2(\tau_i, k_i)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |W_\varepsilon(j\omega_\tau, \tau_i, k_i)|^2 S_m(\omega_\tau)\, d\omega_\tau + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |W(j\omega_\tau, \tau_i, k_i)|^2 S_n(\omega_\tau)\, d\omega_\tau, \qquad (303)$$

где $W_\varepsilon(j\omega_\tau, \tau_i, k_i) = 1 - W(j\omega_\tau, \tau_i, k_i)$ — частотная характеристика ошибки.

Минимум средней квадратической ошибки здесь определяется из условий

$$\frac{\partial \overline{\varepsilon^2(\tau_i, k_i)}}{\partial \tau_i} = 0$$

и

$$\frac{\partial \overline{\varepsilon^2(\tau_i, k_i)}}{\partial k_i} = 0.$$

Рассмотрим примеры определения оптимальных параметров следящих систем и их элементов.

Пример 1. Рассмотрим случай, когда на приемник излучения действует световая помеха со спектральной плотностью

$$S_п(\omega_\tau) = \frac{D_п}{\omega_\tau^2 + \alpha_\tau^2}.$$

Средняя квадратическая ошибка на выходе приемника излучения равна:

$$\overline{\varepsilon^2(k_\Sigma, \tau_1)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{k_\Sigma}{j\omega_\tau \tau_1 + 1} \right|^2 \frac{D_п}{\omega_\tau^2 + \alpha_\tau^2} d\omega_\tau.$$

Интегрируя это выражение, получаем:

$$\overline{\varepsilon^2(k_\Sigma, \tau_1)} = \frac{D_п k_\Sigma^2}{2(\alpha_\tau \tau_1 + 1)\alpha_\tau}. \tag{304}$$

Из полученного выражения видно, что функция $\overline{\varepsilon^2(k_\Sigma, \tau_1)}$ не имеет минимума ни по одной из переменных. Она монотонно убывает с ростом постоянной времени приемника излучения τ_1 и с уменьшением его интегральной чувствительности k_Σ.

Пример 2. Пусть на входе следящей системы с частотной характеристикой

$$W(j\omega t) = \frac{k}{j\omega_t(j\omega_t \tau_1 + 1) + k}$$

действует случайный полезный сигнал со спектральной плотностью

$$S_m(\omega_\tau) = \frac{a_1^2}{2}[\delta(\omega_\tau - \omega_{\tau 1}) + \delta(\omega_\tau + \omega_{t1})]$$

и помеха, представляющая собой белый шум,

$$S_п = D_п,$$

тогда средняя квадратическая ошибка будет определяться формулой (303).

Частотная характеристика ошибки будет равна:

$$W_\varepsilon(j\omega_t) = \frac{j\omega t(j\omega_t \tau_1 + 1)}{j\omega_t(j\omega_t \tau_1 + 1) + k},$$

поэтому

$$\overline{\varepsilon^2(\tau_1, k)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a_1^2}{2} [\delta(\omega_\tau - \omega_{\tau 1}) +$$

$$+ \delta(\omega_\tau + \omega_{\tau 1})] \left| \frac{j\omega_\tau(j\omega_\tau \tau_1 + 1)}{j\omega_\tau(j\omega_\tau \tau_1 + 1) + k} \right|^2 d\omega_\tau +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} D_п k^2 \left| \frac{1}{j\omega_\tau(j\omega_\tau \tau_1 + 1) + k} \right|^2 d\omega_\tau.$$

Интегрируя это выражение, имеем:

$$\overline{\varepsilon^2(\tau_1, k)} = \frac{a_1^2}{2\pi}\,\frac{\omega_{\tau 1}^2(\omega_{\tau 1}^2\tau_1^2+1)}{2\pi(k-\omega_{\tau 1}^2\tau_1)^2-\omega_{\tau 1}^2} + \frac{D_{\text{п}}k}{4\pi}. \qquad (305)$$

Найдем оптимальное значение постоянной времени τ_1, при котором средняя квадратическая ошибка будет минимальной. Дифференцируя формулу (305) по переменной τ_1, получаем:

$$\frac{\partial\overline{\varepsilon^2(\tau_1, k)}}{\partial\tau_1} = \frac{a_1^2\,\omega_{\tau 1}^2}{2\pi}\,\frac{[(k-\omega_{\tau 1}^2\tau_1)^2-\omega_{\tau 1}^2]^2\,2\tau_1\omega_{\tau 1}^2 + (\omega_{\tau 1}^2\tau_1^2+ \ldots \rightarrow}{[(k-\omega_{\tau 1}^2\tau_1)^2-\omega_{\tau 1}^2]^2}$$

$$\leftarrow \ldots \frac{+1)\,2\omega_{\tau 1}^2(k-\omega_{\tau 1}^2\tau_1)}{}.$$

Приравняв производную нулю и преобразовав получившееся уравнение, получим:

$$\tau_1^2 + \frac{2\omega_{\tau 1}^2-k^2}{\omega_{\tau 1}^2 k}\tau_1 - \frac{1}{\omega_{\tau 1}^2} = 0.$$

Это уравнение имеет единственный положительный корень, равный

$$\tau_1 = -\frac{2\omega_{\tau 1}^2-k^2}{2\omega_{\tau 1}^2 k} + \sqrt{\left(\frac{2\omega_{\tau 1}^2-k^2}{2\omega_{\tau 1}^2 k}\right)^2 + \frac{1}{\omega_{\tau 1}^2}}. \qquad (306)$$

Анализируя знак второй производной $\frac{\partial^2\overline{\varepsilon^2(\tau_1, k)}}{\partial\tau_1^2}$, можно убедиться, что найденное значение τ_1 соответствует минимуму функции $\overline{\varepsilon^2(\tau_1, k)}$.

Частотная характеристика оптимальной следящей системы, обеспечивающей минимум средней квадратической ошибки, определяется следующей формулой [Л. 41]:

$$W_0(j\omega_t) = \frac{1}{2\pi\Psi(j\omega_t)}\int_0^{\infty} e^{-j\omega_t t}\,dt \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_m(\omega_t)}{\Psi(-j\omega_t)}\,e^{j\omega_t t}\,d\omega_t, \qquad (307)$$

где $\Psi(j\omega_t)\Psi(-j\omega_t) = S_m(\omega_t) + S_n(\omega_t)$.

Приведенная формула соответствует случаю, когда полезный сигнал $m(t)$ и помеха $n(t)$ независимы.

Для вычисления интегралов в формуле (307) подынтегральная функция представляется в виде суммы простых дробей

$$\frac{S_m(\omega_t)}{\Psi(-j\omega_t)} = \sum_{i=1}^{i=p}\frac{A_i}{j\omega_t + \alpha_i} + \sum_{i=1}^{i=q}\frac{B_i}{j\omega_t - \beta_i}. \qquad (308)$$

Двойной интеграл равняется сумме простых дробей, содержащей полюсы функции, расположенные в верхней комплексной полуплоскости:

$$B(j\omega_t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}e^{-j\omega_t t}\,dt\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{S_m(\omega_t)}{\Psi(-j\omega_t)}e^{j\omega_t t}\,d\omega_t; \qquad (309)$$

$$B(j\omega_t)=\sum_{i=1}^{i=p}\frac{A_i}{j\omega_t+\alpha_i}.$$

Следовательно, частотная характеристика оптимальной следящей системы равна:

$$W_0(j\omega_t)=\frac{B(j\omega_t)}{\Psi(j\omega_t)}. \qquad (310)$$

Для иллюстрации формулы (307) решим следующий пример.

Пример 3. Найдем частотную характеристику системы, обеспечивающей минимум средней квадратической ошибки при подаче на ее вход полезного сигнала со спектральной плотностью

$$S_m(\omega_\tau)=\frac{D_m}{\omega_\tau^2+\alpha_m^2}$$

и белого шума

$$S_n(\omega_\tau)=D_n.$$

Суммируя спектральные плотности полезного сигнала и помехи, получаем:

$$S_m(\omega_\tau)+S_n(\omega_\tau)=\frac{D_m+\alpha_m^2D_n+\omega_t^2D_n}{\omega_t^2+\alpha_m^2},$$

откуда

$$S_m(\omega_\tau)+S_n(\omega_\tau)=$$
$$=\frac{\left(\sqrt{D_m+\alpha_m^2D_n}+j\omega_t\sqrt{D_n}\right)\left(\sqrt{D_m+\alpha_m^2D_n}-j\omega_t\sqrt{D_n}\right)}{(\alpha_m+j\omega_t)(\alpha_m-j\omega_t)}.$$

Из полученного выражения находим значения функций

$$\Psi(j\omega_t)=\frac{\sqrt{D_m+\alpha_m^2D_n}+j\omega_t\sqrt{D_n}}{\alpha_m+j\omega_t};$$

$$\Psi(-j\omega_t)=\frac{\sqrt{D_m+\alpha_m^2D_n}-j\omega_t\sqrt{D_n}}{\alpha_m-j\omega_t}.$$

Подынтегральная функция равна:

$$\frac{S_m(\omega_t)}{\Psi(-j\omega_t)}=\frac{D_m(\alpha_m-j\omega_t)}{(j\omega_t+\alpha_m)(j\omega_t-\alpha_m)\left(\sqrt{D_m+\alpha_m^2D_n}-j\omega_t\sqrt{D_n}\right)},$$

откуда после сокращений

$$\frac{S_m(\omega t)}{\Psi(-j\omega t)}=\frac{D_m}{(j\omega t+\alpha_m)(\sqrt{D_m+\alpha_m D_n}-j\omega t\sqrt{D_n})}.$$

Разлагая это выражение на простые дроби, имеем:

$$\frac{S_m(\omega t)}{\Psi(-j\omega t)}=\frac{D_m}{\left(\sqrt{D_m+\alpha_m^2 D_n}+\alpha_m\sqrt{D_n}\right)(\alpha_m+j\omega t)}+$$

$$+\frac{D_m\sqrt{D_n}}{\left(\sqrt{D_m+\alpha_m^2 D_n}+\alpha_m\sqrt{D_n}\right)\left(\sqrt{D_m+\alpha_m^2 D_n}-j\omega t\sqrt{D_n}\right)}.$$

Второе слагаемое соответствует полюсу в нижней полуплоскости, поэтому

$$B(j\omega t)=\frac{D_m}{\left(\sqrt{D_m+\alpha_m^2 D_n}+\alpha_m\sqrt{D_n}\right)(\alpha_m+j\omega t)}.$$

Таким образом, частотная характеристика оптимальной системы будет:

$$W_0(j\omega t)=\frac{D_m}{\left(\sqrt{D_m+\alpha_m^2 D_n}+\alpha_m\sqrt{D_n}\right)\left(\sqrt{D_m+\alpha_m^2 D_n}+j\omega t\sqrt{D_n}\right)},$$

откуда получим:

$$W_0(j\omega t)=\frac{\frac{D_m}{D_n}}{\left(\sqrt{\frac{D_m}{D_n}+\alpha_m^2}+\alpha_m\right)\left(\sqrt{\frac{D_m}{D_n}+\alpha_m^2}+j\omega t\right)}. \quad (311)$$

В случае, когда $D_n \gg D_m$, имеем:

$$W_0(j\omega t)=\frac{\frac{D_m}{D_n}}{2\alpha_m(\alpha_m+j\omega t)}.$$

Из полученного выражения следует, что квадрат модуля частотной характеристики оптимальной системы при указанном условии соответствует спектральной плотности полезного сигнала. Если же положить $D_m \gg D_n$, то

$$W_0(j\omega t)=\frac{1}{1+\sqrt{\frac{D_n}{D_m}}\,j\omega t}.$$

Это частотная характеристика инерционного звена с постоянной времени $\tau_1=\sqrt{\frac{D_n}{D_m}}$, которая достаточно мала.

37. Коэффициенты статистической линеаризации статических характеристик фотоэлектрических устройств

Анализатор фотоэлектрического измерительного устройства осуществляет нелинейное безынерционное преобразование входного сигнала

$$\Phi(t) = F[\alpha(t)], \tag{312}$$

где $F(\alpha)$ — статическая характеристика измерительного устройства.

Для вычисления характеристик выходного светового сигнала $\Phi(t)$ целесообразно воспользоваться методом статистической линеаризации нелинейного элемента [Л. 17]. При этом выходной световой сигнал аппроксимируется функцией

$$\Phi_л(t) = k_0 m_\alpha + k_1^{(1)} \alpha_0(t), \tag{313}$$

где k_0, $k_1^{(1)}$ — коэффициенты линеаризации;

$\alpha_0(t)$ — центрированная случайная функция.

Для нахождения коэффициентов линеаризации используют следующий критерий:

$$\overline{\Phi_л(t)} = \overline{\Phi(t)}; \tag{314}$$

$$\overline{[\Phi_л(t) - \overline{\Phi_л(t)}]^2} = \overline{[\Phi(t) - \overline{\Phi(t)}]^2}. \tag{315}$$

Из приведенных равенств следует:

$$k_0 = \frac{m_\Phi}{m_\alpha};$$

$$k_1^{(1)} = \pm\sqrt{\frac{D_\Phi}{D_\alpha}}.$$

Чтобы вычислить коэффициенты линеаризации, необходимо знать функцию распределения плотности вероятности $w_1(\alpha)$ входной функции $\alpha(t)$. Тогда коэффициенты линеаризации определяются формулами

$$k_0 = \frac{1}{m_\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha)\, w_1(\alpha)\, d\alpha; \tag{316}$$

$$k_1^{(1)} = \pm\left\{\frac{1}{D_\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty} F^2(\alpha)\, w_1(\alpha)\, d\alpha - \left[\int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha)\, w_1(\alpha)\, d\alpha\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{317}$$

Для вычисления второго коэффициента линеаризации используется также критерий минимума средней квадратической ошибки линеаризации

$$\overline{\varepsilon^2} = \overline{[\Phi(t) - \Phi_л(t)]^2}. \tag{318}$$

На основе этого критерия можно получить следующую формулу для вычисления коэффициента статистической линеаризации:

$$k_1^{(2)} = \frac{1}{D_\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha)(\alpha - m_\alpha) w_1(\alpha)\, d\alpha. \qquad (319)$$

В табл. 8 приведены коэффициенты статистической линеаризации типовых нелинейностей, встречающихся в фотоэлектрических измерительных устройствах. При этом закон распределения плотности вероятности входного сигнала принят нормальным

$$w_1(\alpha) = \frac{1}{\sigma_\alpha \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\alpha - m_\alpha)^2}{2\sigma_\alpha^2}}. \qquad (320)$$

Из приведенных в таблице формул видно, что коэффициенты линеаризации являются функциями математического ожидания m_α и дисперсии σ_α^2 входного случайного возмущения. Чтобы найти математическое ожидание или среднее квадратическое отклонение случайной помехи на выходе нелинейного элемента, необходимо соответствующую характеристику входного возмущения помножить на коэффициент линеаризации.

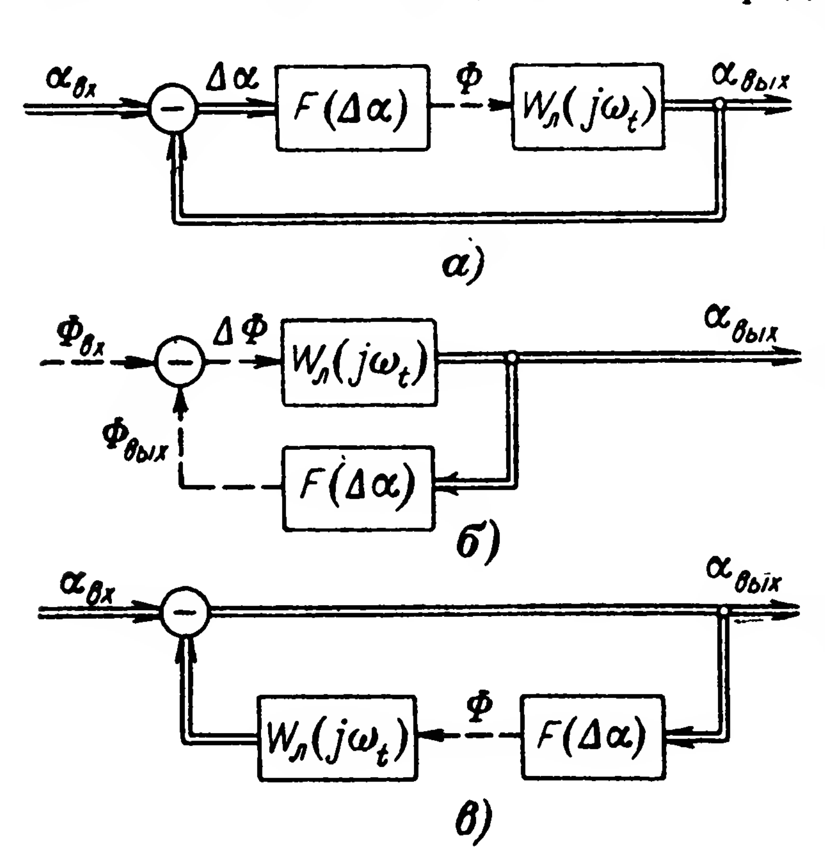


Рис. 44. Структурные схемы нелинейных систем.

а, в — для механических помех; *б* — для световой помехи.

38. Прохождение помех через нелинейную систему с оптическими связями

В следящих системах с оптическими связями нелинейным элементом является фотоэлектрическое измерительное устройство, точнее — его анализатор, преобразующий световой сигнал таким образом, что его характеристики зависят от измеряемого рассогласования.

Если обозначить статическую характеристику нелинейного элемента $F(\Delta\alpha)$, а частотную характеристику линейной части следящей системы $W_л(j\omega_t)$, то в зависимости от места приложения помехи можно представить три типа структурных схем следящих систем. Эти схемы изображены на рис. 44.

В первой из этих схем случайное возмущение приложено на входе следящей системы. Частотные характеристики замкнутой системы для математического ожидания и дисперсии помехи имеют

Таблица 8

Форма нелинейности	Коэффициенты линеаризации
F(α), Φ_m, α, μ_1	$k_0=\frac{\Phi_m}{m_\alpha}\left[2\Phi\left(\frac{m_\alpha}{\sigma_\alpha}\right)-\Phi\left(\frac{1+m_1}{\sigma_1}\right)+\Phi\left(\frac{1-m_1}{\sigma_1}\right)\right];$ $k_1^{(1)}=\frac{\Phi_m}{\sigma_\alpha}\left\{\left[1-4\Phi^2\left(\frac{m_\alpha}{\sigma_\alpha}\right)\right]^{\frac{1}{2}}-\left[1-\frac{k_0^2m_\alpha^2}{\Phi_m^2}-\Phi\left(\frac{1+m_1}{\sigma_1}\right)-\Phi\left(\frac{1-m_1}{\sigma_1}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\right\};$ $k_1^{(2)}=\frac{\Phi_m}{\sigma_\alpha}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[2\varphi\left(\frac{m_\alpha}{\sigma_\alpha}\right)-\varphi\left(\frac{1+m_1}{\sigma_1}\right)-\varphi\left(\frac{1-m_1}{\sigma_1}\right)\right],$ где приняты следующие обозначения: $m_1=\frac{m_\alpha}{\mu_1};\ \sigma_1=\frac{\sigma_\alpha}{\mu_1};$ $\varphi\left(\frac{m_\alpha}{\sigma_\alpha}\right)=e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{m_\alpha}{\sigma_\alpha}\right)^2};\ \ \Phi\left(\frac{m_\alpha}{\sigma_\alpha}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{\frac{m_\alpha}{\sigma_\alpha}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$
	$k_0=\frac{\Phi_m}{m_\alpha}\left[\Phi\left(\frac{1+m_0}{\sigma_0}\right)-\Phi\left(\frac{1-m_0}{\sigma_0}\right)-\Phi\left(\frac{1+m_1}{\sigma_1}\right)+\Phi\left(\frac{1-m_1}{\sigma_1}\right)\right];$

Форма нелинейности	Коэффициенты линеаризации
	$k_1^{(1)}=\frac{\Phi_m}{\sigma_\alpha}\left\{\left[1-\frac{k_{01}^2 m_\alpha^2}{\Phi_m^2}-\Phi\left(\frac{1+m_0}{\sigma_0}\right)-\Phi\left(\frac{1-m_0}{\sigma_0}\right)\right]^{\frac{1}{2}}-\right.$ $\left.-\left[1-\frac{k_{02}^2 m_\alpha^2}{\Phi_m^2}-\Phi\left(\frac{1+m_1}{\sigma_1}\right)-\Phi\left(\frac{1-m_1}{\sigma_1}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\right\};$ $k_1^{(2)}=\frac{\Phi_m}{\sigma_\alpha}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\varphi\left(\frac{1+m_0}{\sigma_0}\right)+\varphi\left(\frac{1-m_0}{\sigma_0}\right)-\varphi\left(\frac{1+m_1}{\sigma_1}\right)-\varphi\left(\frac{1-m_1}{\sigma_1}\right)\right],$ где приняты обозначения: $m_0=\frac{m_\alpha}{\mu_0};\ \sigma_0=\frac{\sigma_\alpha}{\mu_0};$ $k_{0i}=\frac{\Phi_m}{m_\alpha}\left[\Phi\left(\frac{1+m_i}{\sigma_i}\right)-\Phi\left(\frac{1-m_i}{\sigma_i}\right)\right];\ i=0;\ 1.$
	$k_0=k\left\langle 1+\frac{2}{m_1}\left\{\left[(1+m_1)\,\Phi\left(\frac{1+m_1}{\sigma_1}\right)-(1-m_1)\,\Phi\left(\frac{1-m_1}{\sigma_1}\right)\right]-\right.\right.$ $\left.-\frac{\sigma_1}{\sqrt{2\pi}}\left[\varphi\left(\frac{1-m_1}{\sigma_1}\right)-\varphi\left(\frac{1+m_1}{\sigma_1}\right)\right]\right\}-\frac{2}{m_2}\left\{(1+m_2)\,\Phi\left(\frac{1+m_2}{\sigma_2}\right)-\right.$ $\left.\left.-(1-m_2)\,\Phi\left(\frac{1-m_2}{\sigma_2}\right)-\frac{\sigma_2}{\sqrt{2\pi}}\left[\varphi\left(\frac{1-m_2}{\sigma_2}\right)-\varphi\left(\frac{1+m_2}{\sigma_2}\right)\right]\right\}\right\rangle;$

Форма нелинейности	Коэффициенты линеаризации
$F(\alpha)$ Наклон k α μ_1 μ_2	$k_1^{(1)} = k\left\langle 1 - 2\left\{1 + \frac{m_1^2+1}{\sigma_1^2} - \frac{k_{01}^2 m_1^2}{k^2\sigma_1^2} - \left[1 + \left(\frac{1+m_1}{\sigma_1}\right)^2\right]\Phi\left(\frac{1+m_1}{\sigma_1}\right) - \left[1 + \left(\frac{1-m_1}{\sigma_1}\right)^2\right]\Phi\left(\frac{1-m_1}{\sigma_1}\right) - \frac{1+m_1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\varphi\left(\frac{1+m_1}{\sigma_1}\right) - \frac{1-m_1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\varphi\left(\frac{1-m_1}{\sigma_1}\right)\right\}^{\frac{1}{2}} + 2\left\{1 + \frac{m_2^2+1}{\sigma_2^2} - \frac{k_{02}^2 m_2^2}{k^2\sigma_2^2} - \left[1 + \left(\frac{1+m_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\Phi\left(\frac{1+m_2}{\sigma_2}\right) - \left[1 + \left(\frac{1-m_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\Phi\left(\frac{1-m_2}{\sigma_2}\right) - \frac{1+m_2}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}\varphi\left(\frac{1+m_2}{\sigma_2}\right) - \frac{1-m_2}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}\varphi\left(\frac{1-m_2}{\sigma_2}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}\right\rangle;$ $k_1^{(2)} = k\left\{1 + 2\left[\Phi\left(\frac{1+m_1}{\sigma_1}\right) + \Phi\left(\frac{1-m_1}{\sigma_1}\right) - \Phi\left(\frac{1+m_2}{\sigma_2}\right) - \Phi\left(\frac{1-m_2}{\sigma_2}\right)\right]\right\},$ где введены обозначения: $m_2 = \frac{m_\alpha}{\mu_2};\ \sigma_2 = \frac{\sigma_\alpha}{\mu_2};$

Продолжение табл. 8

Форма нелинейности	Коэффициенты линеаризации
	$k_{0i} = 2k \left\{1 - \frac{1}{m_i}\left[(1 + m_i)\,\Phi\left(\frac{1 + m_i}{\sigma_i}\right) - (1 - m_i)\,\Phi\left(\frac{1 - m_i}{\sigma_i}\right)\right] + \right.$ $\left. + \frac{\sigma_i}{m_i \sqrt{2\pi}}\left[\varphi\left(\frac{1 - m_i}{\sigma_i}\right) - \varphi\left(\frac{1 + m_i}{\sigma_i}\right)\right]\right\}; \; i = 1;\, 2.$
	$k_0 = k \left\langle 1 - \frac{1}{m_0}\left[(1 + m_0)\,\Phi\left(\frac{1 + m_0}{\sigma_0}\right) - (1 - m_0)\,\Phi\left(\frac{1 - m_0}{\sigma_0}\right)\right] + \right.$ $+ \frac{\sigma_0}{m_0 \sqrt{2\pi}}\left[\varphi\left(\frac{1 - m_0}{\sigma_0}\right) - \varphi\left(\frac{1 + m_0}{\sigma_0}\right)\right] + \frac{2}{m_1}\left\{\left[(1 + m_1)\,\Phi\left(\frac{1 + m_1}{\sigma_1}\right) - \right.\right.$ $- (1 - m_1)\,\Phi\left(\frac{1 - m_1}{\sigma_1}\right)\right] - \frac{\sigma_1}{\sqrt{2\pi}}\left[\varphi\left(\frac{1 - m_1}{\sigma_1}\right) - \varphi\left(\frac{1 + m_1}{\sigma_1}\right)\right]\right\} - \frac{2}{m_2}\left\{\left[(1 + m_2)\,\times\right.\right.$ $\left.\left.\left. \times\,\Phi\left(\frac{1 + m_2}{\sigma_2}\right) - (1 - m_2)\,\Phi\left(\frac{1 - m_2}{\sigma_2}\right)\right] - \frac{\sigma_2}{\sqrt{2\pi}}\left[\varphi\left(\frac{1 - m_2}{\sigma_2}\right) - \varphi\left(\frac{1 + m_2}{\sigma_2}\right)\right]\right\}\right\rangle;$ $k_1^{(1)} = k \left\langle\left\{1 + \frac{m_0^2 + 1}{\sigma_0^2} - \frac{k_{01}^2 m_0^2}{k^2 \sigma_0^2} - \left[1 + \left(\frac{1 + m_0}{\sigma_0}\right)^2\right]\Phi\left(\frac{1 + m_0}{\sigma_0}\right) - \right.\right.$ $\left. - \left[1 + \left(\frac{1 - m_0}{\sigma_0}\right)^2\right]\Phi\left(\frac{1 - m_0}{\sigma_0}\right) - \frac{1 + m_0}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}}\,\varphi\left(\frac{1 + m_0}{\sigma_0}\right) - \frac{1 - m_0}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}}\,\varphi\left(\frac{1 - m_0}{\sigma_0}\right)\right\}^{\frac{1}{2}} -$

Форма нелинейности	Коэффициенты линеаризации
$F(\alpha)$, α, μ_0, μ_1, μ_2	$$-2\left\{1+\frac{m_1^2+1}{\sigma_1^2}-\frac{k_{02}^2m_1^2}{k^2\sigma_1^2}-\left[1+\left(\frac{1+m_1}{\sigma_1}\right)^2\right]\Phi\left(\frac{1+m_1}{\sigma_1}\right)-\left[1+\left(\frac{1-m_1}{\sigma_1}\right)^2\right]\Phi\left(\frac{1-m_1}{\sigma_1}\right)-\frac{1+m_1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\varphi\left(\frac{1+m_1}{\sigma_1}\right)-\frac{1-m_1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\varphi\left(\frac{1-m_1}{\sigma_1}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}+$$ $$+2\left\{1+\frac{m_2^2+1}{\sigma_2^2}-\frac{k_{03}^2m_2^2}{k^2\sigma_2^2}-\left[1+\left(\frac{1+m_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\Phi\left(\frac{1+m_2}{\sigma_2}\right)-\left[1+\left(\frac{1-m_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\Phi\left(\frac{1-m_2}{\sigma_2}\right)-\frac{1+m_2}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}\varphi\left(\frac{1+m_2}{\sigma_2}\right)-\frac{1-m_2}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}\varphi\left(\frac{1-m_2}{\sigma_2}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}\Bigg\rangle;$$ $$k_1^{(2)}=k\left[1-\Phi\left(\frac{1+m_0}{\sigma_0}\right)-\Phi\left(\frac{1-m_0}{\sigma_0}\right)+2\Phi\left(\frac{1+m_1}{\sigma_1}\right)+2\Phi\left(\frac{1-m_1}{\sigma_1}\right)-2\Phi\left(\frac{1-m_2}{\sigma_2}\right)-2\Phi\left(\frac{1+m_2}{\sigma_2}\right)\right],$$

Продолжение табл. 8

Форма нелинейности	Коэффициенты линеаризации
	где приняты следующие обозначения: $k_{0i}=k\left\{1-\frac{1}{m_i}\left[(1+m_i)\,\Phi\left(\frac{1+m_i}{\sigma_i}\right)-(1-m_i)\,\Phi\left(\frac{1-m_i}{\sigma_i}\right)\right]+\frac{\sigma_i}{m_i\sqrt{2\pi}}\left[\varphi\left(\frac{1-m_i}{\sigma_i}\right)-\varphi\left(\frac{1+m_i}{\sigma_i}\right)\right]\right\};\ i=0;\ 1;\ 2.$
	$k_0=\frac{\Phi_m}{m_\alpha}\left\{\frac{b+m_1}{a-b}\,\Phi\left(\frac{b+m_1}{\sigma_1}\right)-\frac{a+m_1}{a-b}\,\Phi\left(\frac{a+m_1}{\sigma_1}\right)-\frac{b-m_1}{a-b}\,\Phi\left(\frac{b-m_1}{\sigma_1}\right)+\frac{a-m_1}{a-b}\,\Phi\left(\frac{a-m_1}{\sigma_1}\right)+(1+m_1)\,\Phi\left(\frac{1+m_1}{\sigma_1}\right)-(1-m_1)\,\Phi\left(\frac{1-m_1}{\sigma_1}\right)+\frac{\sigma_1}{\sqrt{2\pi}}\left[\varphi\left(\frac{1+m_1}{\sigma_1}\right)-\varphi\left(\frac{1-m_1}{\sigma_1}\right)\right]+\frac{\sigma_1}{(a-b)\sqrt{2\pi}}\left[\varphi\left(\frac{b+m_1}{\sigma_1}\right)-\varphi\left(\frac{b-m_1}{\sigma_1}\right)-\varphi\left(\frac{a+m_1}{\sigma_1}\right)+\varphi\left(\frac{a-m_1}{\sigma_1}\right)\right]\right\};$

Форма нелинейности	Коэффициенты линеаризации
	$$k_1^{(1)}=\frac{\Phi_m}{\sigma_\alpha}\Bigg\{(m_1^2+\sigma_1^2+1)\left[\Phi\left(\frac{1+m_1}{\sigma_1}\right)+\Phi\left(\frac{1-m_1}{\sigma_1}\right)\right]+\frac{(a+m_1)^2+\sigma_1^2}{(a-b)^2}\Phi\left(\frac{a+m_1}{\sigma_1}\right)+\frac{(a-m_1)^2+\sigma_1^2}{(a-b)^2}\Phi\left(\frac{a-m_1}{\sigma_1}\right)+\left[1-\frac{(a+m_1)^2+\sigma_1^2}{(a-b)^2}\right]\Phi\left(\frac{b+m_1}{\sigma_1}\right)+\left[1-\frac{(a-m_1)^2+\sigma_1^2}{(a-b)^2}\right]\Phi\left(\frac{b-m_1}{\sigma_1}\right)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\sigma_1(m_1-1)\varphi\left(\frac{1+m_1}{\sigma_1}\right)+\sigma_1(m_1+1)\varphi\left(\frac{1-m_1}{\sigma_1}\right)\right]+\frac{(2a-m_1-b)\sigma_1}{(a-b)^2}\left[\varphi\left(\frac{b-m_1}{\sigma_1}\right)-\varphi\left(\frac{b+m_1}{\sigma_1}\right)\right]+\frac{(m_1-a)\sigma_1}{(a-b)^2}\varphi\left(\frac{a-m_1}{\sigma_1}\right)+\frac{(m_1+a)\sigma_1}{(a-b)^2}\varphi\left(\frac{a+m_1}{\sigma_1}\right)-\frac{k_0^2m_\alpha^2}{\Phi_m^2}\Bigg\}^{\frac{1}{2}};$$

Форма нелинейности	Коэффициенты линеаризации
	$$k_1^{(2)}=\frac{\Phi_m}{\sigma_\alpha}\left\{\left[\Phi\left(\frac{1+m_1}{\sigma_1}\right)+\Phi\left(\frac{1-m_1}{\sigma_1}\right)\right]\frac{m_1^2+\sigma_1^2}{\sigma_1}+\left[\Phi\left(\frac{1+m_1}{\sigma_1}\right)-\right.\right.$$ $$-\Phi\left(\frac{b+m_1}{\sigma_1}\right)-\Phi\left(\frac{1-m_1}{\sigma_1}\right)+\Phi\left(\frac{b-m_1}{\sigma_1}\right)\right]\frac{m_1}{\sigma_1}+\left[\Phi\left(\frac{b+m_1}{\sigma_1}\right)-\right.$$ $$\left.-\Phi\left(\frac{a+m_1}{\sigma_1}\right)\right]\frac{am_1+m_1^2+\sigma_1^2}{(a-b)\sigma_1}+\left[\Phi\left(\frac{b-m_1}{\sigma_1}\right)-\right.$$ $$\left.-\Phi\left(\frac{a-m_1}{\sigma_1}\right)\right]\frac{\sigma_1^2+m_1^2-am_1}{(a-b)\sigma_1}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\varphi\left(\frac{b+m_1}{\sigma_1}\right)-\varphi\left(\frac{b-m_1}{\sigma_1}\right)-\right.$$ $$\left.-\varphi\left(\frac{a+m_1}{\sigma_1}\right)+\varphi\left(\frac{a-m_1}{\sigma_1}\right)\right]\frac{m_1}{a-b}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\varphi\left(\frac{1+m_1}{\sigma_1}\right)-\right.$$ $$\left.\left.-\varphi\left(\frac{1-m_1}{\sigma_1}\right)\right]m_1-\frac{k_0m_\alpha^2}{\sigma_\alpha\Phi_m}\right\}.$$ В формулах приняты следующие обозначения $$a=\frac{\mu_3}{\mu_1},\quad b=\frac{\mu_2}{\mu_1},$$

следующий вид:

$$W_1^{(0)}(j\omega t)=\frac{k_0(m_{\Delta\alpha},\ D_{\Delta\alpha})\,W_{\text{л}}(j\omega t)}{1+k_0(m_{\Delta\alpha},\ D_{\Delta\alpha})\,W_{\text{л}}(j\omega t)};$$

$$W_1^{(1)}(j\omega t)=\frac{k_1(m_{\Delta\alpha},\ D_{\Delta\alpha})\,W_{\text{л}}(j\omega t)}{1+k_1(m_{\Delta\alpha},\ D_{\Delta\alpha})\,W_{\text{л}}(j\omega t)}.$$

Математическое ожидание выходной помехи определяется формулой

$$m_{\alpha_{\text{вых}}}=\frac{k_0(m_{\Delta\alpha},\ D_{\Delta\alpha})\,W_{\text{л}}(0)\,m_{\alpha_{\text{вх}}}}{1+k_0(m_{\Delta\alpha},\ D_{\Delta\alpha})\,W_{\text{л}}(0)}. \tag{321}$$

Для нахождения ее дисперсии необходимо знать спектральную плотность входного возмущения $S_{\alpha_{\text{вх}}}(\omega_\tau)$, тогда

$$D_{\alpha_{\text{вых}}}=k_1^2(m_{\Delta\alpha},\ D_{\Delta\alpha})\int\limits_{-\infty}^{+\infty}S_{\alpha_{\text{вх}}}(\omega_\tau)\left|\frac{W_{\text{л}}(j\omega_\tau)}{1+k_1(m_{\Delta\alpha},\ D_{\Delta\alpha})\,W_{\text{л}}(j\omega_\tau)}\right|^2 d\omega_\tau. \tag{322}$$

Если вычислить интеграл в формуле (322), то можно получить два алгебраических уравнения, связывающих математические ожидания $m_{\alpha_{\text{вх}}}$, $m_{\alpha_{\text{вых}}}$, $m_{\Delta\alpha}$ и дисперсии $D_{\alpha_{\text{вх}}}$, $D_{\alpha_{\text{вых}}}$, $D_{\Delta\alpha}$ сигналов. Чтобы исключить отсюда величины $m_{\Delta\alpha}$ и $D_{\Delta\alpha}$, необходимо составить еще два уравнения. Эти уравнения можно найти, если записать частотные характеристики, связывающие случайные сигналы $\alpha_{\text{вх}}$ и $\Delta\alpha$:

$$W_2^{(0)}(j\omega t)=\frac{1}{1+k_0(m_{\Delta\alpha},\ D_{\Delta\alpha})\,W_{\text{л}}(j\omega t)};$$

$$W_2^{(1)}(j\omega t)=\frac{1}{1+k_1(m_{\Delta\alpha},\ D_{\Delta\alpha})\,W_{\text{л}}(j\omega t)}.$$

Математическое ожидание и дисперсия помехи на входе нелинейного элемента определяются формулами:

$$m_{\Delta\alpha}=\frac{m_{\alpha_{\text{вх}}}}{1+k_0(m_{\Delta\alpha},\ D_{\Delta\alpha})\,W_{\text{л}}(0)}; \tag{323}$$

$$D_{\Delta\alpha}=k_1^2(m_{\Delta\alpha},\ D_{\Delta\alpha})\int\limits_{-\infty}^{+\infty}S_{\alpha_{\text{вх}}}(\omega_\tau)\times$$

$$\times\left|\frac{1}{1+k_1(m_{\Delta\alpha},\ D_{\Delta\alpha})\,W_{\text{л}}(j\omega_\tau)}\right|^2 d\omega_\tau. \tag{324}$$

Таким образом, из формул (321) — (324) можно получить четыре уравнения:

$$m_{\alpha_{вых}} = f_1(m_{\Delta\alpha}, D_{\Delta\alpha})\, m_{\alpha_{вх}};$$
$$D_{\alpha_{вых}} = f_2(m_{\Delta\alpha}, D_{\Delta\alpha}, D_{\alpha_{вх}});$$
$$m_{\Delta\alpha} = f_3(m_{\Delta\alpha}, D_{\Delta\alpha})\, m_{\alpha_{вх}};$$
$$D_{\Delta\alpha} = f_4(m_{\Delta\alpha}, D_{\Delta\alpha}, D_{\alpha_{вх}}).$$

Решая эту систему уравнений графическим способом или путем последовательных приближений, можно найти математическое ожидание и дисперсию случайной помехи на выходе следящей системы.

В случае, когда на следящую систему воздействует световая помеха, частотные характеристики системы для математического ожидания помехи и ее дисперсии будут:

$$W_3^{(0)}(j\omega t) = \frac{W_л(j\omega t)}{1 + k_0(m_{\alpha_{вых}}, D_{\alpha_{вых}})\, W_л(j\omega t)};$$

$$W_3^{(1)}(j\omega t) = \frac{W_л(j\omega t)}{1 + k_1(m_{\alpha_{вых}}, D_{\alpha_{вых}})\, W_л(j\omega t)}.$$

Для отыскания математического ожидания выходного сигнала и его дисперсии следует использовать формулы:

$$m_{\alpha_{вых}} = \frac{W_л(0)\, m_ф}{1 + k_0(m_{\alpha_{вых}}, D_{\alpha_{вых}})\, W(0)}; \qquad (325)$$

$$D_{\alpha_{вых}} = k_1^2(m_{\alpha_{вых}}, D_{\alpha_{вых}}) \int_{-\infty}^{+\infty} S_ф(\omega_\tau) \times$$
$$\times \left| \frac{W_л(j\omega_\tau)}{1 + k_1(m_{\alpha_{вых}}, D_{\alpha_{вых}})\, W_л(j\omega_\tau)} \right|^2 d\omega_\tau, \qquad (326)$$

где $S_ф(\omega_\tau)$ — спектральная плотность световой помехи.

Вычислив интеграл в формуле (326), получим два алгебраических уравнения:

$$m_{\alpha_{вых}} = f_1(m_{\alpha_{вых}}, D_{\alpha_{вых}}, m_ф);$$
$$D_{\alpha_{вых}} = f_2(m_{\alpha_{вых}}, D_{\alpha_{вых}}, D_ф).$$

Решая эти уравнения, находим математическое ожидание и дисперсию выходного сигнала

$$m_{\alpha_{вых}} = f_3(m_ф, D_ф);$$
$$D_{\alpha_{вых}} = f_4(m_ф, D_ф).$$

Если входное возмущение приложено к измеряемому объекту, то частотные характеристики следящей системы для математиче-

ского ожиданий и дисперсии помехи будут:

$$W_4^{(0)} = \frac{1}{1 + k_0(m_{\alpha_{вых}}, D_{\alpha_{вых}}) W_л(j\omega t)};$$

$$W_4^{(1)} = \frac{1}{1 + k_1(m_{\alpha_{вых}}, D_{\alpha_{вых}}) W_л(j\omega t)},$$

откуда получим формулы для нахождения математического ожидания и дисперсии случайного сигнала на выходе следящей системы:

$$m_{\alpha_{вых}} = \frac{m_{\alpha_{вх}}}{1 + k_0(m_{\alpha_{вых}}, D_{\alpha_{вых}}) W_л(0)}; \qquad (327)$$

$$D_{\alpha_{вых}} = k_1^2(m_{\alpha_{вых}}, D_{\alpha_{вых}}) \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\alpha_{вх}}(\omega_\tau) \times$$

$$\times \left| \frac{1}{1 + k_1(m_{\alpha_{вых}}, D_{\alpha_{вых}}) W_л(j\omega_\tau)} \right|^2 d\omega_\tau. \qquad (328)$$

После вычисления интегралов получим два уравнения:

$$m_{\alpha_{вых}} = f_1(m_{\alpha_{вых}}, D_{\alpha_{вых}}; m_{\alpha_{вх}});$$

$$D_{\alpha_{вых}} = f_2(m_{\alpha_{вых}}, D_{\alpha_{вых}}, D_{\alpha_{вх}}).$$

Из этих уравнений находим характеристики выходного сигнала $m_{\alpha_{вых}}$ и $D_{\alpha_{вых}}$.

Проиллюстрируем методику определения характеристик случайного сигнала на выходе нелинейной следящей системы решением следующего примера.

Пример. Определим характеристики случайного сигнала на выходе системы, частотная характеристика линейной части которой равна:

$$W_л(j\omega t) = \frac{k}{j\omega t(j\omega t\tau_1 + 1)},$$

статическая характеристика измерительного устройства является релейной с ограниченным полем зрения, а на входе действует световая помеха со спектральной плотностью

$$S_ф(\omega_\tau) = D_ф.$$

Так как $m_ф = 0$, то из формулы (325) следует, что $m_{\alpha_{вых}} = 0$. Подставляя в формулу (326) значения входящих в нее функций, имеем:

$$D_{\alpha_{вых}} = k_1^2(0, D_{\alpha_{вых}}) \int_{-\infty}^{+\infty} D_ф \times$$

$$\times \left| \frac{k}{j\omega_\tau(j\omega_\tau\tau_1 + 1) + kk_1(0, D_{\alpha_{вых}})} \right|^2 d\omega_\tau.$$

Интегрируя и преобразуя получившееся выражение, получаем:

$$D_{\alpha_{\text{вых}}} = \frac{kD_{\Phi}}{2} k_1 (0, D_{\alpha_{\text{вых}}}). \tag{329}$$

Подставляя сюда коэффициенты линеаризации из табл. 8, получаем:

$$D_{\alpha_{\text{вых}}} = \frac{kD_{\Phi}}{2} \frac{\Phi_m}{\sigma_{\alpha_{\text{вых}}}} \left\{1 - \left[1 - 2\Phi\left(\frac{\mu_1}{\sigma_{\alpha_{\text{вых}}}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\right\}; \tag{330}$$

$$D_{\alpha_{\text{вых}}} = \frac{2kD_{\Phi}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Phi_m}{\sigma_{\alpha_{\text{вых}}}} \left[1 - \varphi\left(\frac{\mu_1}{\sigma_{\alpha_{\text{вых}}}}\right)\right]. \tag{331}$$

Преобразуя эти формулы, имеем:

$$\sigma_{\alpha_{\text{вых}}} = \sqrt[3]{\frac{kD_{\Phi}\Phi_m}{2}\left\{1 - \sqrt{1 - 2\Phi\left(\frac{\mu_1}{\sigma_{\alpha_{\text{вых}}}}\right)}\right\}}; \tag{332}$$

$$\sigma_{\alpha_{\text{вых}}} = \sqrt[3]{\frac{2kD_{\Phi}\Phi_m}{\sqrt{2\pi}}\left[1 - \varphi\left(\frac{\mu_1}{\sigma_{\alpha_{\text{вых}}}}\right)\right]}. \tag{333}$$

Первая из формул получена для коэффициента линеаризации $k_1^{(1)}$, а вторая — для $k_1^{(2)}$.

Чтобы определить среднее квадратическое значение сигнала $\sigma_{\alpha_{\text{вых}}}$, зададимся числовыми значениями входящих в формулу величин: $k = 10^6$ *угл.мин/лм*, $\sigma_{\Phi} = 0{,}01$ *лм*, $\Phi_m = 0{,}1$ *лм* и $\mu_1 = 0{,}75$ *угл.мин.* Решая способом последовательных приближений уравнения (332) и (333), находим для первого из них $\sigma_{\alpha_{\text{вых}}} = 1{,}36$ *угл.мин*, а для второго — $\sigma_{\alpha_{\text{вых}}} = 1{,}12$ *угл.мин.*

Отсюда следует, что характеристики выходного сигнала, найденные на основе двух критериев линеаризации, могут существенно различаться между собой. Обычно при расчетах пользуются средним значением из двух найденных характеристик.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализ и синтез следящих систем с оптическими связями обычно осуществляют приближенными методами. Эти методы не учитывают полных взаимосвязей между характеристиками световых и электрических сигналов, преобразуемых элементами следящих систем.

Применение многомерных преобразований Фурье позволяет дать точные методы решения ряда важных задач, возникающих при проектировании следящих систем с оптическими связями. К числу таких задач относятся:

определение характеристик детерминированных и случайных сигналов при их преобразовании оптическими элементами;

синтез оптических фильтров, осуществляющих оптимальную фильтрацию полезных световых сигналов в присутствии помех;

расчет статических характеристик фотоэлектрических измерительных устройств;

определение характеристик электрических сигналов на выходе фотоэлектрических устройств при преобразовании ими световых сигналов в электрические.

Внедрение многомерных частотных методов в инженерную практику встречает ряд трудностей, основными из которых являются недостаточная теоретическая разработка этих методов и слабая их популяризация среди инженерно-технических и научных работников.

Трудности теоретической разработки вопросов преобразования многомерных сигналов и синтеза оптимальных фильтров обусловлены их бо́льшими математическими сложностями по сравнению с анализом одномерных сигналов и систем. Однако применение вычислительной техники позволяет обойти эти математические сложности.

Причиной недостаточной популяризации частотных методов анализа многомерных сигналов является отсутствие обобщающей литературы, в которой были бы достаточно полно изложены разбросанные в многочисленных литературных источниках материалы по применению многомерных преобразований Фурье к решению различных задач оптики, электроники и радиопеленгации.

Произведенный в настоящей книге анализ следящих систем с оптическими связями показал, что они являются существенно нелинейными. Нелинейным элементом следящей системы является фотоэлектрическое измерительное устройство.

Особенностями статических характеристик фотоэлектрических нелинейных элементов являются наличие участка спада характеристики, ограниченность ее поля зрения и возможность разрыва характеристики. Применение метода гармонической линеаризации для анализа автоколебательных режимов следящих систем с такими нелинейностями не всегда возможно, так как амплитуды высших гар-

моник на выходе нелинейных элементов могут быть во много раз больше амплитуды первой гармоники сигнала.

Для определения характеристик случайных сигналов на выходе нелинейных систем с оптическими связями может применяться метод статистической линеаризации. Применение этого метода к оценке точности следящих систем с оптическими связями не связано с дополнительными ограничениями по сравнению со следящими системами без оптических связей.

Анализ свойств следящих систем с оптическими связями позволил установить, что методы их расчета имеют ряд особенностей. Эти особенности обусловлены двумя видами управляющих сигналов в следящих системах: световыми и электрическими. В настоящее время методы расчета следящих систем с оптическими связями разработаны недостаточно. Поэтому одной из целей настоящей книги является привлечение внимания к решению связанных с этим задач широкого круга инженерно-технических и научных работников.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андерсон Т., Введение в многомерный статистический анализ, Физматгиз, 1963.

2. Андреев Н. И., Корреляционная теория статистически оптимальных систем, изд-во «Наука», 1966.

3. Белецкий А. Ф., Основы теории линейных электрических цепей, изд-во «Связь», 1967.

4. Под ред. В. А. Бесекерского, Проектирование следящих систем малой мощности, Судпромгиз, 1958.

5. Бунимович В. И., Флуктуационные процессы в радиоприемных устройствах, изд-во «Советское радио», 1951.

6. Ван дер Зил А., Флуктуации в радиотехнике и физике, Госэнергоиздат, 1958.

7. Вафиади В. Г., Фотоэлектрическая автоматика, изд-во «Высшая школа», 1966.

8. Воронцов Л. И., Фотоэлектрические системы контроля линейных величин, изд-во «Машиностроение», 1965.

9. Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, изд-во «Наука», 1967.

10. Градштейн И. С., Рыжик И. М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, 1963.

11. Гринштейн М. М., Фотосопротивления в приборах промышленной автоматики, Госэнергоиздат, 1962.

12. Гуревич М. С., Спектры радиосигналов, Связьиздат, 1963.

13. Джемисон Дж. Э. и др., Физика и техника инфракрасного излучения, изд-во «Советское радио», 1965.

14. Елисеев С. В., Фотоэлектрический и фотографический методы определения направления на цель применительно к геодезическим инструментам, Геодезиздат, 1961.

15. Ефимов М. В., Прицеливание баллистических ракет, Воениздат, 1968.

16. Казамаров А. А. и др., Динамика двухмерных систем автоматического регулирования, изд-во «Наука», 1967.

17. Казаков И. Е., Доступов Б. Г., Статистическая динамика нелинейных автоматических систем, Физматгиз, 1962.

18. Катыс Г. П., Автоматический обзор и поиск в оптическом диапазоне, изд-во «Наука», 1966.

19. Под ред. С. Ф. Корндорфа, Расчет фотоэлектрических цепей, изд-во «Энергия», 1967.

20. Под ред. С. Крендела, Случайные колебания, изд-во «Мир», 1967.

21. Криксунов Л. З., Усольцев И. Ф., Инфракрасные устройства самонаведения управляемых снарядов, изд-во «Советское радио», 1963.

22. Куликовский Л. Ф., Автоматические информационно-измерительные приборы, изд-во «Энергия», 1966.

23. Лазарев Л. П., Инфракрасные и световые приборы самонаведения и наведения летательных аппаратов, изд-во «Машиностроение», 1966.
24. Литвак В. И., Фотоэлектрические датчики в системах контроля, управления и регулирования, изд-во «Наука», 1966.
25. Литвак В. И., Фотоэлектрические приборы и регуляторы в машиностроении, Машгиз, 1962.
26. Марешаль А., Франсон М., Структура оптического изображения, изд-во «Мир», 1964.
27. Мироненко А. В., Фотоэлектрические измерительные системы, изд-во «Энергия», 1967.
28. Мирский Г. Я., Аппаратурное определение характеристик случайных процессов, изд-во «Энергия», 1967.
29. Назаров Б. И., Гироскоп на ракете, Воениздат, 1964.
30. О'Нейл Э., Введение в статистическую оптику, изд-во «Мир», 1966.
31. Под ред. Б. Н. Петрова, В. В. Солодовникова и Ю. И. Топчеева, Современные методы проектирования систем автоматического управления, изд-во «Машиностроение», 1967.
32. Под ред. Д. Питтмана, Инерциальные системы управления, Воениздат, 1964.
33. Попов Е. П., Пальтов И. П., Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем, Физматгиз, 1960.
34. Пугачев В. С., Теория случайных функций, Физматгиз, 1962.
35. Рабинович С. Г., Фотогальванометрические компенсационные приборы, изд-во «Энергия», 1964.
36. Рыфтин Я. А., Телевизионная система, изд-во «Советское радио», 1967.
37. Свешников А. А., Прикладные методы теории случайных функций, Судпромгиз, 1961.
38. Смирнов В. И., Курс высшей математики, Гостехиздат, 1953.
39. Смит Р. и др., Обнаружение и измерение инфракрасного излучения, Изд-во иностр. лит., 1959.
40. Солодов А. В., Линейные системы автоматического управления с переменными параметрами, Физматгиз, 1962.
41. Солодовников В. В., Статистическая динамика линейных систем автоматического управления, Физматгиз, 1960.
42. Строук Дж., Введение в когерентную оптику и голографию, изд-во «Мир», 1967.
43. Туркулец В. И., Удалов Н. П., Фотодиоды и фототриоды, Госэнергоиздат, 1962.
44. Фельдбаум А. А., Электрические системы автоматического регулирования, Оборонгиз, 1957.
45. Харкевич А. А., Спектры и анализ, Гостехиздат, 1957.
46. Хргиан А. Х., Физика атмосферы, Физматгиз, 1958.
47. Шаталов А. С., Преобразование сигналов автоматического управления, изд-во «Энергия», 1965.
48. Шестов Н. С., Выделение оптических сигналов на фоне случайных помех, изд-во «Советское радио», 1967.
49. Ягодкин В. В., Хлебников Г. А., Гироприборы баллистических ракет, Воениздат, 1967.
50. Якушенков Ю. Г., Физические основы оптико-электронных приборов, изд-во «Советское радио», 1965.

СОДЕРЖАНИЕ

БИБЛИОТЕКА ПО АВТОМАТИКЕ

ГОТОВЯТСЯ К ПЕЧАТИ

Александровский Н. М., Элементы теории оптимальных систем автоматического управления.

Алексеева Н. Н. и др. Тиристорные регулируемые электроприводы постоянного тока.

Бойков Н. А. и др., Измерение давлений при быстропротекающих процессах.

Борцов Ю. А. и др., Экспериментальное определение параметров и частотных характеристик автоматизированных электроприводов.

Вершин В. Е., Добролюбов Л. В., Статистический анализ электрических цепей.

Виленкин А. Г., Импульсные транзисторные стабилизаторы напряжения.

Гельман М. М., Преобразователи напряжения в кодированный временной интервал.

Городецкий А. Б. и др., Миниатюризация магнитных усилителей.

Данюшевская Е. Ю., Реверсивные электроприводы постоянного тока с тиристорными преобразователями.

Диковский Н. М., Капралов И. И., Магнитоуправляемые контакты.

Евтушенко И. Н., Телемеханика в больших системах управления промышленными предприятиями.

Ильинский В. М., Бесконтактное измерение расходов.

Касаткин А. С., Коменда Э. И., Статическая оптимизация аппаратуры контроля.

Касаткин А. С., Хрулева А. В., Рациональный выбор характеристик контроля.

Коссов О. А., Хасаев О. И., Полностью управляемые тиристоры в устройствах автоматики.

Кривицкий С. О., Эпштейн И. И., Динамика частотнорегулируемых электроприводов с автономными инверторами.

Кривоносов А. И., Термодиоды и термотриоды.

Кузнецов А. А., Кузнецов О. А., Элементы быстродействующих аналого-цифровых преобразователей.

Куликовский Л. Ф. и др., Автоматические измерительные приборы с выполнением математических и логических операций.

Махнанов В. Д., Милохин Н. Т., Устройства времяимпульсного кодирования.

Маякин В. П., Донченко Э. Г., Электронные системы для автоматизированного измерения характеристик жидкостей и газов.

Цена 52 коп.

Пересада В. П., Распознавание образцов в многомерной статистике.

Петров Ю. П., Вопросы оптимального управления движением транспортных средств.

Писарев А. Л. и др., Выходные устройства бесконтактных систем автоматики.

Поспелов Д. А., Вероятностные автоматы.

Раскин Л. Я., Стабилизированные автономные инверторы на тиристорах для питания сети потребителей.

Райцын Т. М., Синтез систем автоматического управления методом направленных графов.

Розенвассер Е. Н., Юсупов Р. М., Чувствительность систем автоматического управления.

Ройзен В. З., Малогабаритные поляризованные реле и дистанционные переключатели.

Сандлер А. С., Преобразователи частоты на тиристорах для управления высокоскоростными двигателями.

Соловьев В. Ф., Рациональное кодирование при передаче сообщений.

Степанов И. М., Электрохимическая запись.

Темников Ф. Е., Славинский В. Л., Функциональные развертывающие преобразователи сигнала.

Титов Н. И., Успенский В. К., Моделирование систем с запаздыванием.

Черепанов А. И., Динамика систем многоканального позиционного регулирования.

Шукшунов В. Е., Корректирующие звенья в устройствах измерения нестационарных температур